

Forschung am IVW Köln, 9/2015

Institut für Versicherungswesen

Asset Liability Management in einem selbstfinanzierenden Pensionsfonds

Oskar Goecke

Oskar Goecke
Forschungsstelle FaRis

Asset Liability Management in einem selbstfinanzierenden Pensionsfonds

Zusammenfassung

Wir betrachten einen Pensionsfonds, der den Versorgungsberechtigten gegen Zahlung eines Einmalbeitrags eine Leibrente gewährt. Der Pensionsfonds verfügt über keinen externen Sponsor oder Garantiegeber (daher selbstfinanzierend), so dass alle Renten immer und ausschließlich aus dem vorhandenen Vermögen gezahlt werden müssen. In extremen Situationen (deutliche Verlängerung der Lebenserwartung, substanzielle Einbrüche bei den Kapitalanlagen) muss der Pensionsfonds daher die Renten nach unten anpassen. Wir entwickeln und untersuchen Regeln für das Asset Liability Management, bei denen die beiden widerstrebenden Ziele, nämlich hohe und zugleich stabile Renten, simultan berücksichtigt werden. Wir führen den Nachweis, dass der intergenerationale Risikoausgleich im Rentenkollektiv substanziell das Rendite-Risiko-Profil für die Versorgungsempfänger verbessert.

Abstract

We consider a pension fund which provides life annuities to the retirees who pay a single premium when entering the fund. The pension fund is self-financing in the sense that there is no external sponsor who guarantees the pension payments. As a consequence in extreme scenarios (due to longevity risk or capital market risks) the pension fund might be forced to reduce the amount of pensions. We develop asset liability management rules which simultaneously take into account the two conflicting objectives, namely high and stable pensions. We provide evidence that the intergenerational risk transfer within the collective of retirees substantially improves the risk return profile for the pensioners.

Schlagwörter

selbstfinanzierender Pensionsfonds, aktuarielle Tontine, Langlebigkeitsrisiko, Kapitalanlagerisiko, Asset Liability Management, Risiko-Rendite-Profile, intergenerationaler Risikotransfer

Keywords

self-financing pension fund, actuarial tontine, longevity risk, capital market risk, asset liability management, risk-return-profiles, intergenerational risk transfer

Inhalt

1	Einführung	1
2	Modell eines offenen selbstfinanzierenden Pensionsfonds	4
2.1	Grundelemente des Modells	4
2.2	Bezeichnungen	5
2.3	Kapitalmarktmodell	7
2.4	Modellierung der Sterblichkeit	9
2.4.1	Deterministisches CBD-Modell	9
2.4.2	Kalibrierung des CBD-Modells	12
2.4.3	Stochastisches CBD-Modell	14
2.4.4	Simulation Bestandsentwicklung	18
2.5	Generationenrendite	22
3	Asset Liability Management für den Pensionsfonds	24
3.1	Fortschreibung der Aktiva und Passiva	24
3.2	Strukturparameter des Rentenbestandes	25
3.3	ALM Strategie	26
3.3.1	Allgemeine Darstellung	26
3.3.2	Konkretisierung der ALM-Regeln	31
4	Modellrechnungen	35
4.1	Kalibrierung des Referenzmodells, Simulationsszenarien	35
4.2	Deterministisches ALM-Modell	37
4.3	Stochastische Sterblichkeit bei sicherer Kapitalanlage	43
4.4	Der allgemeine Fall	47
4.4.1	Unterdeckungswahrscheinlichkeiten	47
4.4.2	Rendite-Risiko Profile	53

5	Anhang.....	60
5.1	Das Problem der doppelten Stochastizität.....	60
5.2	Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung in <i>CBD-Modell</i>	66
5.3	Stochastik der Deckungsrückstellung im <i>CBD-Modell</i>	68
5.4	Die aktuarielle Tontine	73
5.4.1	Definition.....	73
5.4.2	Generationenrendite bei einer Tontine	75
5.4.3	Rendite-Risiko-Profil einer Tontine	77
	Literatur	82
	Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	84

1 Einführung

Wir betrachten die Rentenphase (oder Entsparphase) einer kapitalgedeckten Altersversorgung: Aus einem gegebenen Kapitalstock soll für eine Gruppe von Rentenempfängern eine Leibrente finanziert werden. Trifft man Annahmen hinsichtlich der Überlebenswahrscheinlichkeiten und der Verzinsung des Kapitalstocks, so kann man mit aktuariellen Methoden berechnen, welche Renten sich aus dem Kapitalstock finanzieren lassen. Da die *tatsächlichen* Überlebenswahrscheinlichkeiten und die *tatsächlichen* Kapitalerträge von den angenommenen abweichen, stellt sich die Frage, ob die Renten oder der Kapitalstock an die geänderten Verhältnisse angepasst werden. Wir sprechen von einem *selbstfinanzierenden Pensionsfonds*,¹ wenn abgesehen vom anfänglichen Kapitalstock keine externe Finanzierungsquelle zur Verfügung steht. Es gibt also keinen externen Dritten (Aktionär, Arbeitgeber, öffentliche Stelle, o.ä.), der bei einer Finanzierungslücke von außen Kapital zuführt.

Ist die Bereitschaft von außen Kapital zuzuführen Teil eines Geschäftsmodells (wie z.B. bei einer Lebensversicherungs-AG), so wird der Kapitalgeber eine *Gegenleistung* verlangen, etwa in Gestalt einer Beteiligung an Kapitalerträgen. In jedem Falle geht die Gegenleistung zu Lasten der Renten. Da es sich um ein Risikogeschäft handelt, wird der externe Kapitalgeber eine *Risikoprämie*, also eine Überrendite im Vergleich zu einer sicheren Kapitalanlage als Gegenleistung für die Bereitstellung von Sicherungskapital erwarten. Im Bereich der betrieblichen Altersversorgung (Pensionskasse, Pensionsfonds) ist regelmäßig der Arbeitgeber verpflichtet, bei Bedarf Kapital nachzuschießen. Aus Sicht der Rentenbezieher ist dies sicherlich eine günstige Situation. Doch aus Arbeitgebersicht ist die Einstandspflicht ein Kostenfaktor, der im Extremfall den Arbeitgeber veranlassen könnte, Versorgungsordnungen für neue Arbeitnehmer zu schließen. Zumindest wird er bei Versorgungszusage die Kosten bzw. die Risiken einkalkulieren. Ob in der privaten oder betrieblichen Altersversorgung – in jedem Falle geht jede von außen bereitgestellte Garantie zu Lasten der Renten, direkt oder indirekt. Dies gilt nicht nur in Bezug auf das Kapitalmarktrisiko, sondern auch für das Langlebigkeitsrisiko. Selbstfinanzierender Pensionsfonds bietet somit tendenziell höhere Leistungen.

Selbstfinanzierende Pensionsfonds sind allerdings auf ein wirksames *Asset-Liability Management* (ALM) angewiesen: Der Kapitalstock muss bei vertretbarem Risiko möglichst renabel angelegt werden und die Renten müssen so angepasst werden, dass sie

¹ Wir verwenden hier den Begriff *Pensionsfonds* im allgemeinen Sinne als eine Einrichtung, die einen Kapitalstock verwaltet bzw. am Kapitalmarkt anlegt und hieraus an eine Gruppe von Rentenbezieher Renten zahlt.

dauerhaft finanzierbar bleiben und zugleich eine faire Beteiligung am Kapitalstock ermöglichen. Des Weiteren müssen Veränderung der Lebenserwartung rechtzeitig erkannt und berücksichtigt werden.

In der vorgelegten Arbeit werden wir ALM-Strategien für selbstfinanzierende Rentenbestände entwickeln. Es wird gezeigt, dass selbstfinanzierende Rentenbestände aufgrund des Risikoausgleichs zwischen den Rentnergenerationen

- das systematische und das idiosynkratische Langlebkeitsrisiko tragen können, indem die Renten moderat an veränderte Sterblichkeitsraten angepasst werden,
- durch eine vergleichsweise hohe Aktienquote in der Kapitalanlage höhere Kapitalerträge und damit ein höheres Rentenniveau ermöglichen,
- gegenüber anderen nicht-kollektiven Verrentungsverfahren (Tontinen) ein signifikant besseres Rendite-Risiko Profil aufweisen.

In [Goecke 2011, 2013b] haben wir anhand eines einfachen Kapitalmarktmodells den Ansparprozess zum Aufbau eines Versorgungskapitals untersucht. Wir haben dabei gezeigt, dass kollektive Sparformen einem individuellen Sparprozess überlegen sind. Das in [Goecke 2011, 2013b] vorgestellte *Modell des Kollektiven Sparens* wird in der hier vorgelegten Arbeit auf den Rentenphase (Entsparphase) übertragen. Anders als in der Ansparphase können wir in der Entsparphase das Sterblichkeitsrisiko nicht ausblenden.

Diese und vorangegangene Untersuchungen ([Goecke 2011, 2012, 2013a, 2013b]) unterstreichen den Nutzen, den *kollektive Versorgungssysteme* für die Beteiligten haben.

Die Untersuchung ist wie folgt aufgebaut. Nach einer kurzen Einführung stellen wir in Kapitel 2 ein stochastisches Modell für einen offenen selbstfinanzierenden Pensionsfonds vor. Dieses beinhaltet sowohl ein stochastisches Kapitalmarktmodell (Abschnitt 2.3) als auch ein stochastisches Sterblichkeitsmodell, eine einfache Variante des von *Cairns, Blake* und *Dowd* entwickelten Modells (*CBD-Modell* in Abschnitt 2.4). In Abschnitt 2.5 führen wir den Begriff der *Generationenrendite* ein, der einen Vergleich verschiedener ALM-Strategien ermöglicht. Hierauf aufbauend formulieren wir in Kapitel 3 ALM-Strategien für selbstfinanzierende Pensionsfonds. Diese Strategien sind so konzipiert, dass nach einer externen Störung der Pensionsfonds stets wieder in den „Gleichgewichtszustand“ zurückgeführt wird. Die theoretischen Ergebnisse des 3. Kapitels werden im folgenden Kapitel 4 anhand von umfangreichen Modellrechnungen (Monte Carlo Simulationen) auf ihre Praktikabilität hin untersucht.

Im Anhang (Abschnitt 5) werden einige spezielle Aspekte gesondert dargestellt

- das Problem der doppelten Stochastizität bei kleinen Pensionsbeständen,

- die Ableitung von Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung im *CBD*-Modell,
- die Stochastik der Deckungsrückstellung im *CBD*-Modell,
- die aktuarielle Tontine.

2 Modell eines offenen selbstfinanzierenden Pensionsfonds

2.1 Grundelemente des Modells

Wir betrachten einen reinen Rentenbestand, der mit einem Kapitalstock ausgestattet ist. Aus dem Kapitalstock werden für alle Personen des Rentenbestandes jährlich vorschüssig Renten gezahlt. Der Rentenbestand ändert sich laufend, zum einen versterben Rentner und zum anderen tritt jährlich eine Gruppe von Neurentnern dem Rentenkollektiv bei. Mit Eintritt in das Rentenkollektiv leisten die Neurentner einen einmaligen Finanzierungsbeitrag. Wir wollen der Einfachheit halber von einem *Pensionsfonds* sprechen.² Wir ordnen dem Pensionsfonds eine Bilanz zu (vgl. Abbildung 1): Auf der Aktivseite verbuchen wir die Kapitalanlagen (das *Portfolio*) mit ihren Zeitwerten und auf der Passivseite die bewerteten Rentenverpflichtungen (*Deckungsrückstellungen*), die nach aktuariellen Methoden berechnet werden. Der Pensionsfonds soll kapitalgedeckt sein, d.h. in aller Regel soll der Zeitwert der Kapitalanlagen größer sein als die Deckungsrückstellungen. Der Teil der Kapitalanlagen, der nicht für die Bedeckung der Rückstellungen benötigt wird, wollen wir als *kollektive Reserve* bezeichnen – vgl. [Goecke 2011].

Portfolio	kollektive Reserve
	Deckungsrückstellungen

ABBILDUNG 1: Stilisierte Bilanz des Pensionsfonds

Die Kapitalanlagen werden auf dem Kapitalmarkt angelegt, je nach Zusammensetzung des Portfolios ist die Wertentwicklung („Verzinsung“) mehr oder weniger stark schwankend. Auch die Dauer der Rentenzahlungen an die Pensionäre ist ungewiss; zum einen ist die Lebensdauer jedes einzelnen ungewiss (individuelles oder *idiosynkratisches*

² Eine Verwechslung mit dem Pensionsfonds im Sinne Legaldefinition des § 112 VAG ist nicht zu befürchten.

Sterblichkeitsrisiko), zum anderen ist die kollektive Lebenserwartung der Gesamtbevölkerung ungewiss (*systematisches Sterblichkeitsrisiko*).

Der Pensionsfonds ist *selbstfinanzierend*, d.h. es gibt keinen externen Kapitalgeber (Aktionär, Arbeitgeber, öffentliche Stellen, etc.), der bei Bedarf Mittel zuschießen könnte bzw. Mittel entnehmen könnte. Wir wollen annehmen, dass ein Pensionsfondsmanager (m./w.) damit beauftragt ist, die Kapitalanlagen zu steuern (*Asset Management*) und die Einmalbeiträge der Neurentner sowie die Rentenhöhe (*Liability Management*) festzulegen. Wir gehen davon aus, dass der Pensionsfondsmanager selbstlos und ausschließlich im Interesse des Kollektivs der Rentenempfänger handelt.

2.2 Bezeichnungen

t : Zeitindex $t = 0, 1, \dots, T$

z : festes Renteneintrittsalter, für alle Modellrechnungen wählen wir $z = 65$.

ω : theoretisch erreichbares Höchstalter, für alle Modellrechnungen wählen wir $\omega = 115$.

$\{L_z(0), L_{z+1}(0), \dots, L_\omega(0)\}$: Anfangsbestand zum Zeitpunkt $t = 0$, wird als gegeben angenommen. Wir gehen grundsätzlich von *homogenen Personengruppen* (Alterskohorten) aus; für alle Personen gleichen Alters gilt die gleiche Überlebenswahrscheinlichkeit.

$L_z(t)$: Anzahl der Neurentner, die zum Zeitpunkt t dem Rentenkollektiv beitreten; wir betrachten $L_z(t)$ als eine deterministische Größe.

$L_x(t)$: Anzahl der überlebenden x -jährigen Personen des Rentenbestandes zu Beginn des $(t+1)$ -sten Jahres für $x = z + 1, \dots, \omega$.

$L(t) := \sum_{x=z}^{\omega} L_x(t)$: Gesamtzahl der Rentner zu Beginn des $(t+1)$ -sten Jahres.

$r(t)$: Höhe der Rente, die zu Beginn des $(t+1)$ -sten Jahres an jeden Rentner gezahlt wird. Die Rente wird jährlich vorschüssig gezahlt, alle Rentner erhalten die gleiche Rente.

${}_k p_x(t, s)$: die *geschätzte* k -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer (zum Zeitpunkt t) x -jährigen Person für die Periode $[t, t + k[$ basierend auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt s . Für $k=1$ schreiben wir $p_x(t, s) = {}_1 p_x(t, s)$. Für $k \geq 0$ gilt ${}_{k+1} p_x(t, s) = p_x(t, s) {}_k p_{x+1}(t+1, s)$, hierbei folgen wir der Konvention, dass ${}_0 p_x(t, s) = 1$.

μ : konstanter Rechnungszins (als Zinsintensität).

$a(x, t, s) := \sum_{k=0}^{\omega-x} \exp(-k\mu) {}_k p_x(t, s)$: Barwert einer jährlich vorschüssigen Leibrenten vom Betrage 1 für eine (zum Zeitpunkt t) x -jährige Person, kalkuliert auf Basis der Beobachtungen bis zum Zeitpunkt s .

$a_x(t) := a(x, t, t)$: Barwert einer jährlich vorschüssigen Leibrenten vom Betrage 1 für eine (zum Zeitpunkt t) x -jährige Person, kalkuliert auf Basis der Beobachtungen bis t .

$V(t) := r(t) \sum_{x=z}^{\omega} a(x, t, t) L_x(t)$: Deckungsrückstellung zum Zeitpunkt t .

$v(t) := \frac{V(t)}{r(t)} = \sum_{x=z}^{\omega} a(x, t, t) L_x(t)$: normierte Deckungsrückstellung.

$EP(t+1) = f r(t+1) a(z, t+1, t) L_z(t+1)$: Einmalbeitrag der Gruppe der Neurentner zum Zeitpunkt $t+1$ bei Eintritt in das Rentenkollektiv. Hierbei unterstellen wir einen konstanten Sicherheitsfaktor f als Aufschlag auf die zum Zeitpunkt t geschätzten Rentenbarwerte.

$P(t)$: Zeitwert des Portfolios zu Beginn des $(t+1)$ -sten Jahres, *nach* Zugang des Einmalbeitrags der Neurentner und *vor* Auszahlung der fälligen Renten.

$\rho(t) := \ln\left(\frac{P(t)}{V(t)}\right)$: Zum Zeitpunkt t beobachtete *log-Reservequote* (oder kurz *Reservequote*).³

³ Wie wir später noch sehen werden, erleichtert die Verwendung der log-Reservequote statt der üblichen Reservequote $(P(t) - V(t)) / P(t)$ die formale Darstellung erheblich.

$\varepsilon(t) := \ln\left(\frac{r(t+1)}{r(t)}\right)$: Die ab Zeitpunkt $t+1$ wirksame Rentenanpassung. In dem hier vorgestellten Modell wird $\varepsilon(t)$ bereits zum Zeitpunkt t festgelegt; es gilt also das Prinzip der *Vorausdeklaration*.

Bemerkungen

1. In den Modellrechnungen (Kapitel 4) sind die Größen $L_x(t)$ stets ganzzahling, d.h. die mit der (stochastischen) Überlebenswahrscheinlichkeit multiplizierten Anzahl von Personen einer Alterskohorte werden in den Modellrechnungen auf ganzzahlige Werte gerundet. In den Herleitungen dieses und des folgenden Kapitels sind die Größen $L_x(t)$ nicht notwendiger Weise ganzzahling. Wir interpretieren $L_x(t)$ als Anzahl einer Kohorte eines „sehr großen“ Bestandes. Insbesondere gilt dann

$$\frac{L_{t+k}(x+k)}{L_t(x)} = {}_k p_x(t, t+k);$$

die zum Zeitpunkt $t+k$ geschätzte Überlebenswahrscheinlichkeit entspricht also der tatsächlichen (beobachteten) Überlebenswahrscheinlichkeit.

2. Für die Barwerte $a(x, t, s)$ gilt folgende Rekursion: $a(\omega, t, s) = 1$ und

$$a(x, t, s) = 1 + \exp(-\mu) p_x(t, s) a(x+1, t+1, s) \quad \text{für } z \leq x < \omega. \quad (\text{Gl. 1})$$

3. Wir können den Barwert $a(x, t, s)$ als Funktion des Rechnungszinses betrachten und setzen $h(\mu) = a(x, t, s)$. Dann bezeichnen wir

$$D(a(x, t, s)) := \frac{-d \ln(h(\mu))}{d\mu} = \sum_{k=0}^{\omega-x} k \frac{e^{-k\mu} {}_k p_x(t, s)}{a(x, t, s)},$$

als die *Duration* des Rentenbarwertes $a(x, t, s)$. Es gilt folgende Abschätzung

$$h(\mu + \Delta\mu) \approx h(\mu) \exp(-\Delta\mu D(a(x, t, s))). \quad (\text{Gl. 2})$$

Die Duration entspricht der (mit dem Diskontierungsfaktor und der Erlebenswahrscheinlichkeit) *gewichteten Restlaufzeit* der Rentenverpflichtung.

2.3 Kapitalmarktmodell

Wir wählen ein sehr einfaches Kapitalmarktmodell, das *Black-Scholes-Modell*, das zwei Anlagemöglichkeiten vorsieht, nämlich eine sichere Kapitalanlage zu einem festen Zinssatz $\bar{\mu}$ (als Zinsintensität) und eine Anlage in ein breit gestreutes Aktienportfolio

(*Marktportfolio*). Die Wertentwicklung des Marktportfolios, dargestellt als Index $S(t)$, folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung:

$$S(t) = S(0) \exp(t \mu_M + \sigma_M W_t), \quad (\text{Gl. 3})$$

wobei $(W_t)_{t \geq 0}$ ein Standard- Wienerprozess ist.

Es gilt $\mathbf{E} \left(\frac{S(t+1)}{S(t)} \right) = \exp(\mu_M + \frac{1}{2} \sigma_M^2)$. Die *Sharpe Ratio* $r_M := \frac{\mu_M + \frac{1}{2} \sigma_M^2 - \bar{\mu}}{\sigma_M}$ ist ein

Maß für die durchschnittliche Überrendite pro Risikoeinheit. Den stochastischen Prozess $S(t)$ können wir auch mittels einer *stochastischen Differenzialgleichung* charakterisieren, es gilt nämlich:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\bar{\mu} + \sigma_M r_M) dt + \sigma_M dW_t, \quad (\text{Gl. 4})$$

Sämtliche Modellrechnungen basieren auf folgender Kalibrierung:

$$\bar{\mu} = 0.02, \quad \sigma_M = 0.2, \quad r_M = 0.25. \quad (\text{Gl. 5})$$

Für die *erwartete Rendite* des Marktportfolios gilt dann

$$\mathbf{E} \left(\ln \left(\frac{S(t+1)}{S(t)} \right) \right) = \mu_M = \bar{\mu} + \sigma_M r_M - \frac{1}{2} \sigma_M^2 = 0.05$$

Wir nehmen an, dass zum Zeitpunkt $t = 0, 1, \dots, T-1$ festgelegt wird, welcher Anteil des vorhandenen Vermögens des Pensionsfonds $P(t)$ in das Marktportfolio investiert wird. Wir nehmen ferner an, dass innerhalb des Anlagejahres die Aktienquote $AQ(t)$ - gemessen als relativer Anteil des Vermögens, der in das Marktportfolio investiert wird - durch Umschichtung konstant gehalten wird (*Constant Mix- Strategie*). Wir bezeichnen mit

$$\sigma(t) := AQ(t) \sigma_M \text{ die Risikoexposition des Portfolios zum Zeitpunkt } t.$$

Bemerkungen:

1. Wir betrachten ein Portfolio $\bar{P}(t)$ ohne externe Zu- oder Abflüsse, bei dem die Risikoexposition $\sigma(t)$ zeitstetig angepasst wird. Dann gilt

$$\frac{d\bar{P}(t)}{\bar{P}(t)} = (\bar{\mu} + \sigma(t) r_M) dt + \sigma(t) dW_t \quad (\text{Gl. 6})$$

und

$$\ln\left(\frac{\bar{P}(t)}{\bar{P}(0)}\right) = t\bar{\mu} + \int_0^t \sigma(s)r_M - \frac{1}{2}\sigma^2(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s \quad (\text{Gl. 7})$$

2. Wählt man zum Zeitpunkt 0 eine Aktienquote AQ und führt im Zeitintervall $[0, t]$ keine Umschichtungen durch (*Buy-and-Hold Strategie*), so ändert sich die Aktienquote im Zeitablauf (bezogen auf den jeweiligen Zeitwert) und es gilt dann:

$$\ln\left(\frac{\bar{P}(t)}{\bar{P}(0)}\right) = \ln\left(AQ \exp(t \mu_M + \sigma_M W_t) + (1 - AQ) \exp(t \bar{\mu})\right). \quad (\text{Gl. 8})$$

Für $AQ \neq 1$ sind die Renditen offensichtlich nicht normalverteilt.

Die Verteilungen der Rendite in (Gl. 7) und (Gl. 8) unterscheiden sich bei einem 1-jährigen Anlagehorizont nur geringfügig, so dass bei Simulationsrechnungen der Unterschied kaum ins Gewicht fällt. Allerdings ist zu beachten, dass bei einer Buy-and-Hold-Strategie für eine Aktienquote kleiner als 100% der Teil des Vermögens, der sicher angelegt wurde, ein Mindestvermögen zum Ende der Anlageperiode sicherstellt. Bei einer *Constant Mix- Strategie* gibt es hingegen kein strikt positives Mindestvermögen zum Ende der Anlageperiode.

2.4 Modellierung der Sterblichkeit

2.4.1 Deterministisches CBD-Modell

Wir verwenden hier das nach den Autoren *Cairns, Blake* und *Dowd* benannte *CBD-Modell* in seiner einfachsten Form und betrachten in diesem Abschnitt zunächst die *deterministische* Variante.⁴ Hierzu definieren wir zunächst die logit-Funktion:

$$\text{logit}(q) := \ln\left(\frac{q}{1-q}\right) \text{ für } 0 < q < 1.$$

Wir modellieren die 1-jährigen Sterbewahrscheinlichkeiten einer x -jährigen Person zum Zeitpunkt t über folgenden *2-fach linearen Ansatz*:

$$\text{logit}(q(x,t)) = \kappa_1(t) + \kappa_2(t)(x - z) \text{ für } x < \omega \quad (\text{Gl. 9})$$

$$\kappa_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t \text{ und } \kappa_2(t) = \beta_0 + \beta_1 t \quad (\text{Gl. 10})$$

⁴ Es gibt mittlerweile ein ganzes Spektrum von Varianten des *CBD-Modells* - vgl. [Cairns e.a. 2006], [Cairns e.a. 2009], [Plat[2009], [Cairns e.a. 2011], [Cairns 2013].

Wir interpretieren z als das *Rentenbeginnalter* und ω als das *Schlussalter*, d.h. $q(\omega, t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

Setzen wir $p(x, t) := 1 - q(x, t)$ so gilt

$$p(x, t) = (1 + g(x, t))^{-1} \text{ für } x < \omega \text{ und } p(\omega, t) = 0 \text{ für alle } t, \quad (\text{Gl. 11})$$

mit $g(x, t) := \exp(\kappa_1(t) + \kappa_2(t)(x - z))$

Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf von $\text{logit}(q(x, t))$ für den Altersbereich $x = 65, \dots, 114$ für die Basistafel der Richttafeln Heubeck 2005G⁵ und für die projizierte Periodentafel 2055 für Männer und Frauen.

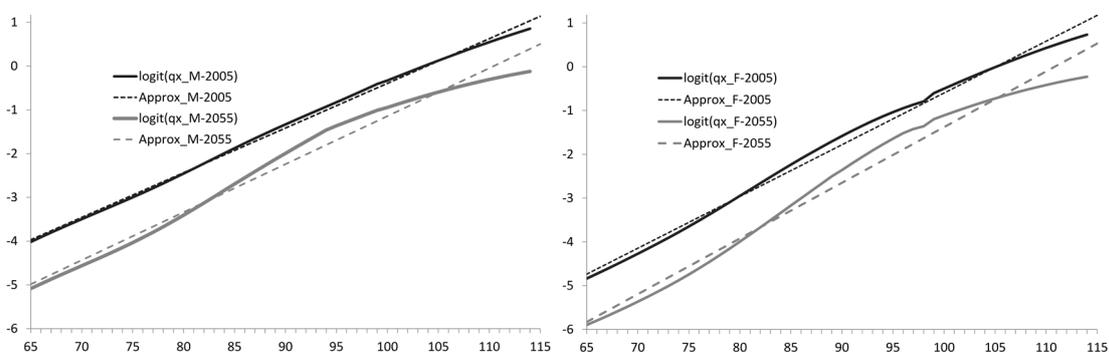


ABBILDUNG 2: *CBD-Modell*, $\text{logit}(q_x)$ für die Basistafel der Richttafel Heubeck 2005G und die projizierte Periodentafel 2055 (Rentenbestand, Alter 65-114) für Männer (rechts) und Frauen, sowie jeweils die linearen Approximationen.

Bemerkungen:

1. Der Parameter $\kappa_1(t)$ repräsentiert das Sterblichkeitsniveau für alle Alter; $\alpha_1 < 0$ bedeutet *ceteris paribus* eine Sterblichkeitsverbesserung in der Zeit für alle Altersgruppen (säkulare Sterblichkeitstrend). $\kappa_2(t)$ charakterisiert die Altersabhängigkeit der Sterblichkeit; für die zeitunabhängige Komponente β_0 wird man plausiblerweise annehmen, dass $\beta_0 > 0$, denn die Sterbewahrscheinlichkeit nimmt mit fortschreitendem Alter zu.⁶ Die zeitabhängige Komponente β_1 ermöglicht die Berücksichtigung einer

⁵ [Heubeck e.a. 2006]

⁶ Eine für bestimmte Altersgruppen sinkende Sterblichkeit, wie man sie etwa beim sog. Unfallbuckel beobachtet, kann man in dem hier vorgestellten einfachen *CBD-Modell* nicht abbilden.

vom Alter abhängigen Sterblichkeitsverbesserung. Da $\beta_1 = \frac{\partial^2 \text{logit}(q(x,t))}{\partial t \partial x}$ bedeutet

$\beta_1 > 0$, dass der *säkulare Trend* der Sterblichkeitsverbesserung für hohe Alter stärker wirkt.

2. Es geht im Folgenden *nicht* darum, die Sterblichkeit eines Rentnerbestandes möglichst exakt zu prognostizieren oder die Rechnungsgrundlagen Heubeck 2005G („Richttafeln“) möglichst genau zu approximieren.⁷ Vielmehr wollen wir ein möglichst einfaches und transparentes Modell entwickeln, das die Stochastik der künftigen Sterblichkeitsentwicklung *plausibel* abbildet. Die Plausibilität des Modells soll insbesondere dadurch gewährleistet sein, dass Simulationsrechnung kompatibel mit den projizierten Perioden-Sterbetafeln der *Richttafeln* sind. Wir approximieren also die *Richttafeln 2005G* (Basistafel und Projektionen), ohne das Sterblichkeitsmodell der *Richttafeln* zu hinterfragen.
3. Für die Basistafel 2005 der *Richttafeln* sind die logit-Werte der Sterbewahrscheinlichkeiten zumindest für die Altersgruppe der Rentner nahezu linear – vgl. Abb. 2. Diese Beobachtung deckt sich mit entsprechenden Untersuchungen für Sterbetafeln anderer Länder.⁸ Der obige Ansatz in (Gl. 9) und (Gl. 10) ist allerdings nicht geeignet, die Sterbewahrscheinlichkeit für alle Alter zu approximieren; daher ist das Modell für breitere Altersklassen entsprechende zu modifizieren.⁹
4. Für Alter über 90 Jahre ist die lineare Approximation der logit-Werte (insbesondere bei Frauen) schlechter; dies kann aber auch damit zusammenhängen, dass bei der Herleitung der *Richttafeln* für höhere Alter eine Extrapolation auf der Grundlage eines modifizierten Gompertz-Ansatzes erfolgte.¹⁰ Ähnliches gilt für die projizierten Sterbetafeln; hier wird für die *Richttafeln* eine nach Altern und Geschlecht gestaffelte prozentuale Abnahme der Sterbewahrscheinlichkeiten angenommen. Eine solche Annahme führt notwendigerweise dazu, dass ein zunächst linearer Zusammenhang der logit-Werte verloren geht.

⁷ Die Modellrechnungen in Abschnitt 4 zeigen allerdings, dass das vereinfachte *CBD-Modell* für Rentenbestände eine sehr gute Approximation der *Richttafeln* liefert.

⁸ Vgl. [Cairns e.a. 2009]

⁹ Vgl. hierzu die Modell M6, M7 und M8 in [Cairns e.a. 2009] p. 12 ff.

¹⁰ Vgl. [Heubeck e.a. 2006] S. 488f.

2.4.2 Kalibrierung des CBD-Modells

Wir setzen $z = 65$ und $\omega = 115$ und kalibrieren unser Modell (Gl. 9, 10) auf der Grundlage der Richttafeln 2005G, wobei wir uns bei der Kalibrierung auf die Sterbewahrscheinlichkeiten des Rentnerbestandes für die Altersgruppe $x = 65, 66, \dots, 100$ beschränken. Bei den Richttafeln werden aufbauend auf der *Basistafel* (= Periodentafel für das Jahr 2005) die Periodentafeln für die Jahre nach 2005 durch einfache Projektion der Sterbewahrscheinlichkeiten bestimmt. Wir berücksichtigen die Projektionen der Periodentafeln für die Jahre 2005 bis 2055. Eine im Jahre 2005 65-jährige Person würde im Überlebensfalle im Jahre 2055 das Schlussalter $\omega = 115$ erreichen.

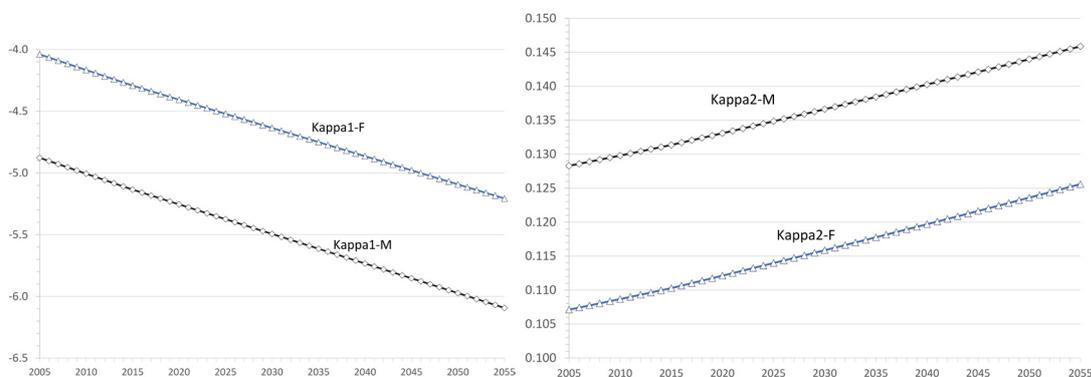


ABBILDUNG 3: Parameter $\kappa_1'(t), \kappa_2'(t)$ für $t \in \{0, 1, \dots, 50\}$, $t = 0$ entspricht dabei dem Basisjahr 2005, $t = 50$ entspricht dem Projektionsjahr 2055.

Wir interpretieren $t = 0$ als das Jahr 2005 und bestimmen für jedes $t \in \{0, 1, \dots, 50\}$ die Parameter $(\kappa_1'(t), \kappa_2'(t))$, so dass $\sum_{x=65}^{100} (\text{logit}(q_{RT2005G}(x, t)) - \kappa_1'(t) - \kappa_2'(t)(x - z))^2$ minimiert wird. Die sich so ergebenden Werte sind in Abb. 3 dargestellt.

Abb. 3 zeigt, dass sich die Parameter $\kappa_1'(t), \kappa_2'(t)$ nun ihrerseits recht gut als lineare Funktionen von t annähern lassen. Wir setzen daher $\kappa_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ bzw.

$\kappa_2(t) = \beta_0 + \beta_1 t$, wobei die Parameter $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ wiederum mittels eines „kleinste Quadrate-Ansatzes“ bestimmt werden. Dabei ergeben sich folgende Werte:

	Männer	Frauen	hybrider Bestand
α_0	- 4.0547	- 4.8885	- 4.4716
α_1	- 0.023129	- 0.024149	- 0.023639
β_0	0.10737	0.13291	0.12014
β_1	0.00037387	0.00035482	0.00036435

Table 1: Übersicht der Parameter für das *CBD-Modell* bei einer Kalibrierung auf der Grundlagen der Periodentafeln 2005- 2055 der Richttafeln Heubeck 2005G.

Die Parameter für den hybriden (gemischten) Bestand ergeben sich jeweils aus Mittelwerte der Größen für Männer und Frauen. Man beachte, dass ein anfänglicher Bestand, der je zur Hälfte aus Frauen und Männern besteht, aufgrund der unterschiedlichen Sterbewahrscheinlichkeiten für Frauen und Männern im Laufe der Jahre ein abweichendes Geschlechterverhältnis aufweisen wird. Simuliert man also den Rentenbestand getrennt nach Männer und Frauen, so ergibt sich ein anderer Verlauf als bei eine Simulation mit gemittelter Kalibrierung. Um nicht immer für Männer und Frauen separat rechnen zu müssen, werden wir im Folgenden in aller Regel auf die *hybride* Kalibrierung zurückgreifen und nur gelegentlich für Frauen und Männer getrennt rechnen.

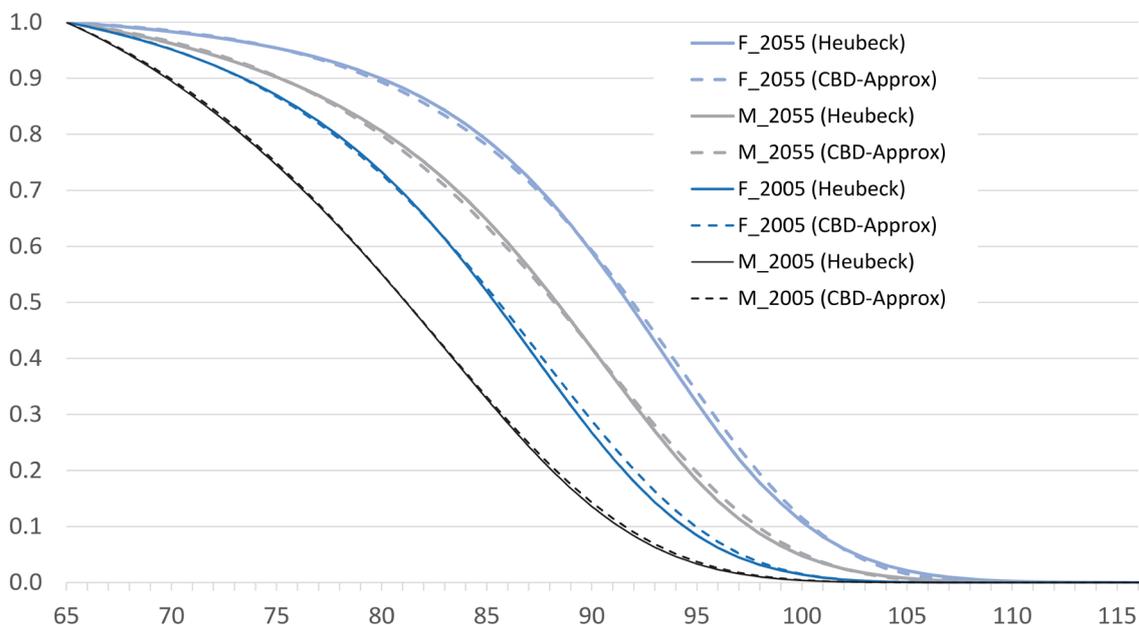


ABBILDUNG 4: Vergleich der Periodensterbetafeln Heubeck 2005G und *CBD-Modell* für das Basisjahr 2005 und für das Projektionsjahr 2055, jeweils für Männer und Frauen.

Um die Güte der Approximation zu illustrieren haben wir in Abb. 4 die Periodentafeln der Richttafeln und der Approximationen durch das vereinfachte *CBD-Modelle* für die Jahre 2005 (Basisjahr) und 2055 jeweils für Männer und Frauen verglichen. Dabei wurde die Kalibrierung der Tabelle 1 zugrunde gelegt. Der Vergleich zeigt, dass das vereinfachte *CBD-Modell* die Heubecktafeln hinlänglich gut approximiert. Es sei nochmals betont, dass es hier nicht darum geht, die Heubeck Rechnungsgrundlagen möglichst gut zu approximieren, sondern darum, die Sterblichkeitsentwicklung in einem stochastischen Modell plausibel zu simulieren.

2.4.3 Stochastisches CBD-Modell

Das Risiko, dass die Kalkulationsannahmen für die Sterblichkeit falsch sind bzw. Änderungen der Sterblichkeitsentwicklung falsch eingeschätzt werden, konstituiert das *Langlebigkeitsrisiko*. In unserem Modell soll dieses Risiko vereinfacht abgebildet werden. In (Gl. 9) ersetzen wir dazu die deterministische Funktion $t \mapsto \kappa_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ durch einen Random Walk mit konstanter Drift:

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \sigma_\alpha W'_{t+1} = \kappa_1(t) + \sigma_\alpha W'_{t+1} \quad (\text{Gl. 12})$$

mit $\sigma_\alpha > 0$ und einem Standard Wienerprozess $(W'_t)_{t \geq 0}$ mit $W'_0 = 0$.

Wir unterstellen, dass die beiden Wiener Prozesse $(W_t)_{t \geq 0}$ und $(W'_t)_{t \geq 0}$ stochastisch unabhängig sind. Ob tatsächlich die Bevölkerungssterblichkeit und die Kapitalmärkte voneinander unabhängig sind, kann bezweifelt werden. In einer prosperierenden Volkswirtschaft werden sich tendenziell die Kapitalmärkte positiv entwickeln und zugleich aufgrund einer besseren medizinischen Versorgung die Lebenserwartungen steigen. Es wird auch die These vertreten (*Asset Meltdown Hypothesis*)¹¹, dass in einer alternden Volkswirtschaft (u.a. hervorgerufen durch eine gestiegene Lebenserwartung der Rentenbezieher) die Wertpapierrenditen sinken. Da jedoch nicht erkennbar ist, wie man die Abhängigkeit zwischen Bevölkerungssterblichkeit und die Kapitalmärkte angemessen modellieren könnte, geschweige denn eine Kalibrierung der Abhängigkeiten vornehmen könnte, scheint die oben getroffene Annahme vertretbar.

Somit erhalten wir die stochastischen Überlebenswahrscheinlichkeiten

$$\tilde{p}(x,t) := (1 + \exp(\sigma_\alpha W'_{t+1}) g(x,t))^{-1} \text{ für } x < \omega \text{ und } \tilde{p}(\omega,t) \equiv 0. \quad (\text{Gl. 13})$$

¹¹ vgl. [Takáts 2010]

Für die k -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten setzen wir

$${}_k\tilde{p}(x,t) := \prod_{j=0}^{k-1} \tilde{p}(x+j, t+j) \quad (\text{Gl. 14})$$

Bemerkungen:

1. Bei der Interpretation von (Gl. 13) ist zu beachten, dass wir zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, \dots$ die 1-jährigen Sterbewahrscheinlichkeiten $\tilde{q}(t, x)$ bzw. die 1-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}(t, x)$ jeweils auf das Jahr $[t, t+1]$ beziehen. Die Zufallsgrößen $\tilde{q}(t, x)$ bzw. $\tilde{p}(t, x)$ realisieren sich also erst zum Zeitpunkt $t+1$. Die vom Wienerprozess $(W'_t)_{t \geq 0}$ erzeugte σ -Algebra \mathcal{M}_t interpretieren wir in gewohnter Weise als den Informationsstand zum Zeitpunkt $t \geq 0$.¹²
2. Für $x < \omega$ gilt stets $0 < \tilde{p}(x, t) < 1$; dies ist ein Vorteil gegenüber dem Gompertz-schen Sterbe-gesetz $\ln(p(x, t)) = - \int_x^{x+1} \mu(x+u, u) du$, wenn man einen linearen Ansatz für der Sterbeintensität unterstellt. Ist etwa $\mu(x, t) = y_1(t) + y_2(t)(x - z)$ und ersetzt man hier die Parameter $y_1(t), y_2(t)$ durch Gauss-Prozesse, so erhält man positiver Wahrscheinlichkeit Überlebenswahrscheinlichkeiten größer als 1.¹³
3. In [Cairns 2006] erhält auch $\kappa_2(t)$ eine stochastische Komponente:

$\beta_0 + \beta_1 t + \sigma_\beta W''_{t+1} = \kappa_2(t) + \sigma_\beta W''_{t+1}$ mit korrelierten Prozessen (W'_t, W''_t) . Die Stochastik der Sterblichkeitsentwicklung erhält dadurch eine altersabhängige Komponente. Die Schwankungen der Sterblichkeit bei höheren Altern sind dann größer als bei jüngeren. Aus Gründen der Übersichtlichkeit der Darstellung verzichten wir auf diese zweite stochastische Komponente. Denn anders als in [Cairns 2006] wollen wir nicht das Langlebighkeitsrisiko bewerten, vielmehr wollen wir ALM-Regeln zu Steuerung eines selbstfinanzierenden Rentenbestandes untersuchen. Bei der Kalibrierung unseres vereinfachten Modells greifen wir jedoch Ergebnisse in [Cairns 2006] zurück.

¹² Vgl. hierzu [Cairns e.a. 2009] S. 691.

¹³ [Schrager 2006] führt ein Modell mit affiner stochastischer Mortalität ein, das als Spezialfall den Gompertz-Ansatz umfasst. Die analytische Handhabbarkeit des Modells wird aber durch die Möglichkeit negativer Sterblichkeit erkauft - vgl. [Schrager 2006] S. 87.

4. Ist $(w'_0, w'_1, w'_2, \dots)$ eine Realisation des Prozesses $(W'_t: t = 0, 1, 2, \dots)$, so gilt

${}_k \tilde{p}(x, t) = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + \exp(\sigma_\alpha w'_{t+j+1}) g(x + j, t + j))^{-1}$. Die tatsächliche k -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit realisiert sich also erst im Zeitpunkt $t+k+1$.

5. Für $s \leq t$ ist $\mathbf{E}(\tilde{p}(\cdot, t) | \mathcal{M}_s)$ die (zufällige) Periodensterbetafel für die Periode $[t, t+1]$ basierend auf dem Informationsstand bis zum Zeitpunkt s . Falls $W'_s = w'_s$, so ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{p}(x, t) | W'_s = w'_s) &= \mathbf{E}\left(\left[1 + \exp(\sigma_\alpha (W'_{t+1} - W'_s)) \exp(\sigma_\alpha w'_s) g(x, t)\right]^{-1} \middle| W'_s = w'_s\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \exp(\sqrt{t-s+1} \sigma_\alpha z) \exp(\sigma_\alpha w'_s) g(x, t)\right]^{-1} \varphi(z) dz \end{aligned} \quad (\text{Gl. 15})$$

der *besten Schätzer* der Überlebenswahrscheinlichkeit auf der Grundlage der bis zum Zeitpunkt s verfügbaren Informationen. Hierbei bezeichne $\varphi(\cdot)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

Das Integral in (Gl. 15) muss numerisch ausgewertet werden, was bei Monte Carlo Simulationen sehr zeitaufwendig ist. Wir ersetzen daher den Ausdruck

$\mathbf{E}\left(\left[1 + \exp(\sigma_\alpha (W'_{t+1} - W'_s)) \exp(\sigma_\alpha w'_s) g(x, t)\right]^{-1} \middle| W'_s = w'_s\right)$ durch

$$\left[1 + \exp(\sigma_\alpha (\mathbf{E}(W'_{t+1} - W'_s) | W'_s = w'_s)) \exp(\sigma_\alpha w'_s) g(x, t)\right]^{-1} = (1 + \exp(\sigma_\alpha w'_s) g(x, t))^{-1}.$$

Bei einer realistischen Kalibrierung (s.u.) ist der Fehler vernachlässigbar. Wir setzen daher

$$p_x^{(e)}(t, s) := \left(1 + \exp(\sigma_\alpha w'_{\min(s, t+1)}) g(x, t)\right)^{-1} \quad (\text{Gl. 16})$$

und interpretieren $p_x^{(e)}(t, s)$ als die Schätzung der 1-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten x -jähriger Personen für die Periode $[t, t+1]$ basierend auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt s . Für $s \geq t+1$ gilt

$$p_x^{(e)}(t, s) = \left(1 + \exp(\sigma_\alpha w'_{t+1}) g(x, t)\right)^{-1}.$$

6. Allgemeiner ist für $k \geq 1$ und $s \leq t + 1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \tilde{p}(x + j, t + j) \middle| W'_s = w'_s \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \exp(\sigma_\alpha (W'_{t+j+1} - W'_s)) \exp(\sigma_\alpha w'_s) g(x + j, t + j) \right)^{-1} \middle| W'_s = w'_s \right) \end{aligned}$$

der *beste Schätzer* der k -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung der Beobachtungen bis s . Dieser Wert kann berechnet werden; erfordert aber die numerische Auswertung eines k -fachen Integrals. Analog zu Ziffer 5 approximieren wir diesen Ausdruck durch $\prod_{j=0}^{k-1} (1 + \exp(\sigma_\alpha w'_s) g(x + j, t + j))^{-1}$. Allgemeiner definieren wir für alle $s \geq 0$:

$${}_k p_x^{(e)}(t, s) := \prod_{j=0}^{k-1} (1 + \exp(\sigma_\alpha w'_{\min(s, t+j+1)}) g(x + j, t + j))^{-1} \quad (\text{Gl. 17})$$

und interpretieren ${}_k p_x^{(e)}(t, s)$ die Schätzung der k -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten x -jähriger Personen für die Periode $[t, t + k]$ basierend auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt s . Für $s \geq t + k$ ist ${}_k p_x^{(e)}(t, s) = {}_k p_x(t)$ die tatsächlich realisierte k -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit.

Kalibrierung des Parameters σ_α

Eine Kalibrierung der Volatilität σ_α des W'_t -Prozesses ist auf der Grundlage der Richttafeln natürlich nicht möglich, da diesen ein deterministisches Modell der künftigen Mortalitätsentwicklung zugrunde liegt. Wir greifen daher zurück auf die Kalibrierung in [Cairns e.a. 2006]. Auf der Grundlage der Sterbetafeln für England und Wales 1982-2002 ergibt sich ein Wert von $\sigma_\alpha \approx 4\%$.¹⁴ Weiter unten werden wir zeigen, dass die Stochastik des W'_t -Prozesses das Asset Liability Management weniger stark beeinflusst als das Kapitalanlagerisiko oder strukturelle Verschiebungen im Bestand.

¹⁴ Da das Modell in [Cairns e.a. 2006] eine altersabhängige stochastische Komponenten umfasst, haben wir hier die Berechnung der Standardabweichung für ein „durchschnittliches“ Bestandsalter von $x = 90$ zugrunde gelegt. Da das tatsächliche Durchschnittsalter in der Regel niedriger ist, wird hierdurch die Standardabweichung etwas überschätzt.

Die folgende Abbildung (Abb. 5) zeigt die mittlere fernere Lebenserwartung 65-jähriger Männer und Frauen in Abhängigkeit vom Geburtsjahr (1940 – 2000). Bei der Berechnung der Quantile des stochastischen *CBD-Modells* wurden jeweils 50 000 Simulationen ausgewertet. Zu Vergleichszwecken wurde die Entwicklung der Lebenserwartung nach den Richttafeln 2005G dargestellt. Abb. 5 macht deutlich, dass die Abweichung des vereinfachten *CBD-Modells* von den Richttafel-Werten im Verhältnis zu Unsicherheit der Sterblichkeitsentwicklung kaum ins Gewicht fällt.

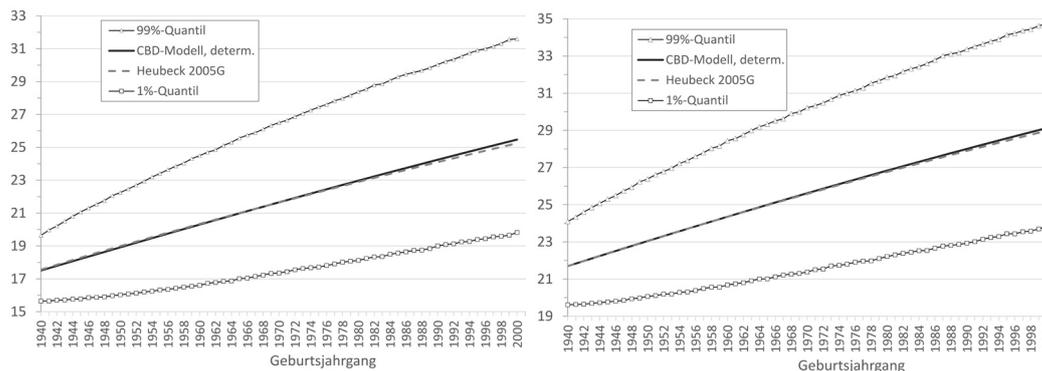


ABBILDUNG 5: Mittlere fernere Lebenserwartung 65-jähriger Männer (links) bzw. Frauen (rechts) in Abhängigkeit vom Geburtsjahr, Vergleich *CBD-Modell* und Richttafeln 2005G, sowie die 1% und 99%-Quantile für das *CBD-Modell* ($\sigma_\alpha = 0.04$).

2.4.4 Simulation Bestandsentwicklung

Bei der Simulation des Rentenbestandes berücksichtigen wir die doppelte Stochastik in folgender Weise:

1. Wir simulieren den Prozesse W'_t für $t = 0, 1, \dots, T$ und erhalten für jeden Simulationslauf eine Folge 1-jähriger Überlebenswahrscheinlichkeiten $(p(t, x) : t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + T)$. Wir interpretieren $t_0 = 0$ als das Jahr 2005 und simulieren die Bestandsentwicklung bis zum Jahre 2065; d.h. $T = 60$.
2. Für alle $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$ und $x \in \{z, z + 1, \dots, \omega\}$ simulieren wir die Größe $L_{t+1}(x + 1)$ als Realisation einer $B(n, p)$ -verteilten Zufallsvariablen mit $n = L_t(x)$ und $p = p(t, x)$.

Auch im Hinblick auf die weiteren Modellrechnungen konstruieren wir einen großen Musterbestand („BestandXL“) mit folgenden Eigenschaften (vgl. Abb. 6):

- Anzahl der 65-jährigen (Neurentner) beträgt $L_z(0) = 100000$.
- Für $x \geq z$, $x < \omega$ gilt $L_{x+1}(0) = L_x(0) p(x, 0)$, ganzzahlig gerundet.
- $p(x, t)$ wird kalibriert nach Tabelle 1 für einen hybriden Bestand.

Ohne Sterblichkeitstrend befände sich also dieser Bestand in einem *steady state*, d.h. die Anzahl der Gestorbenen würde durch einen Neuzugang von 100 000 genau ausgeglichen. Die Gesamtzahl der Personen dieses Bestandes beträgt 1 852 681.

Aus dem *BestandXL* leiten wir zwei weitere, unter der Ganzzahligkeitsbedingung *strukturgleiche* Bestände ab:

- *BestandL*: Bestandsstruktur wie *BestandXL*, jedoch mit insgesamt 18 529 Personen, im Anfangsbestand, also rund 1/100 des Bestandes XL.
- *BestandS*: Bestandsstruktur wie *BestandXL*, jedoch mit insgesamt nur 184 Personen im Anfangsbestand, also rund 1/100000 des Bestandes XL.

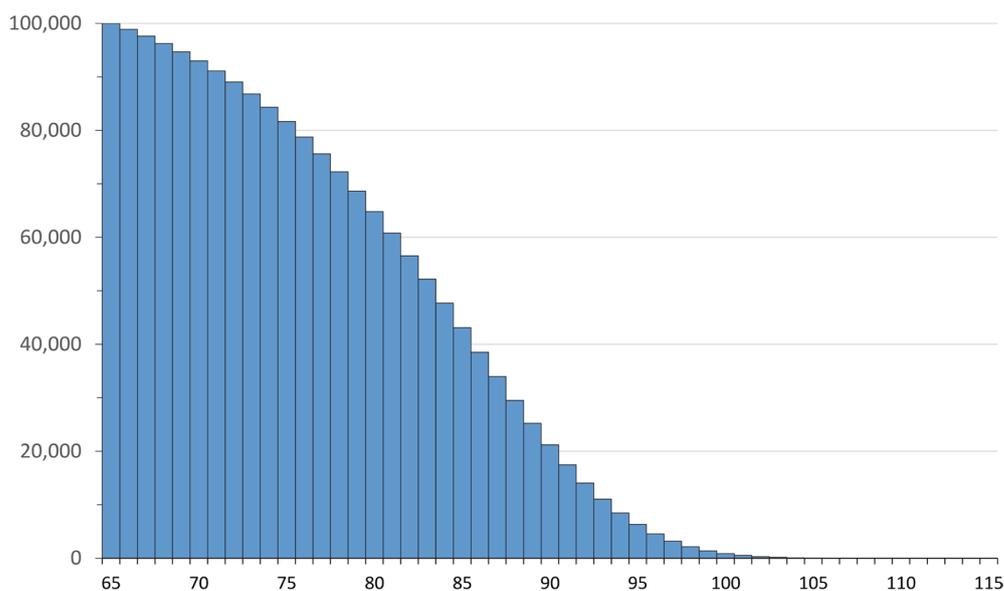


ABBILDUNG 6: Struktur des Anfangsbestandes *BestandXL*

Auf der Grundlage der obigen Kalibrierung führen wir für alle drei Bestände jeweils 20 Simulationsläufe durch und berechnen die Entwicklung der Gesamtzahl der Rentner für einen Zeitraum von 60 Jahren (ab 2005 bis 2065). Die Berechnungen sind in Abb. 7 zusammengefasst. Für die drei Musterbestände werden jeweils drei Niveaus für die Volatilität der Sterblichkeitsentwicklung unterstellt: $\sigma_\alpha = 0$ (linke Spalte in Abb. 7), σ_α

= 4% (mittlere Spalte) und $\sigma_\alpha = 8\%$ (rechte Spalte). Zusätzlich ist in den Teildiagrammen jeweils durch eine gebrochene Linie der (deterministische) Bestandsverlauf, berechnet auf Grundlage der Rechnungsgrundlagen der Richttafeln 2005G, dargestellt.¹⁵

Zunächst fällt auf, dass bei nahezu allen Hochrechnungen die Gesamtzahl der Rentner im Zeitablauf ansteigt; dies ist dem Umstand geschuldet, dass der Ausgangsbestand die *steady-state* Struktur der Basistafel 2005 hat und dass aufgrund der sinkenden Sterbewahrscheinlichkeiten der Bestand immer langsamer abstirbt. Das Teildiagramm oben links (keine Stochastik) zeigt, dass das *CBD*-Modell eine sehr gute Approximation der projizierten Periodensterbetafeln der Richttafeln 2005G liefert.

Die drei Grafiken der linken Spalte illustrieren die Stochastizität der *individuellen Sterblichkeit*. Nur bei dem kleinen Bestand (untere Zeile der Abb. 7) kommt es zu nennenswerten Abweichungen vom erwarteten Verlauf. Das *systematische Sterblichkeitsrisiko* dominiert das *idiosynkratische Risiko* also auch bei einem kleinen Bestand.

¹⁵ Aus den tabellierten Rechnungsgrundlagen der Richttafeln 2005G haben wir durch einfache Interpolation *hybride* Rechnungsgrundlagen für einen gemischten Bestand abgeleitet.

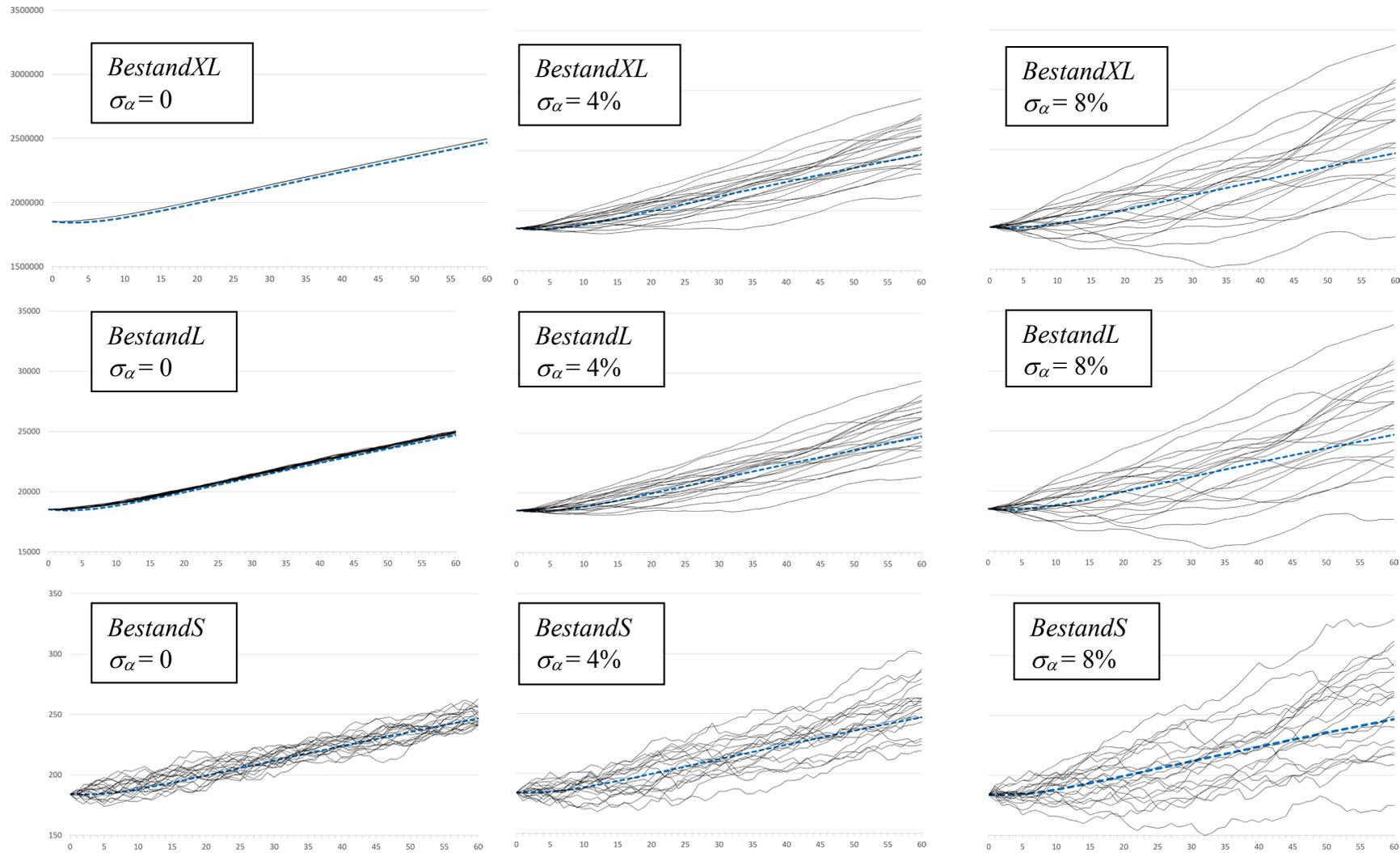


ABBILDUNG 7: Simulation der Bestandsentwicklung (einschl. Neuzugang) für 60 Jahre für einen großen, mittleren und kleinen Bestand bei verschiedenen σ_α -Niveaus. Die gebrochene Linie zeigt jeweils die deterministische Hochrechnung des Bestandes, wenn man die Rechnungsgrundlagen der Richttafeln 2005G zugrunde legt.

2.5 Generationenrendite

Kern des kollektiven Modells ist es, den Risikoausgleich zwischen den Generationen in Bezug auf das Langlebigkeitsrisiko und das Kapitalanlagerisiko darzustellen. Der generationenübergreifende Ausgleich des Kapitalanlagerisiko hat zur Folge, dass *ex post* einzelnen Generationen von dem kollektiven Ausgleich profitieren, andere hingegen ohne den kollektiven Ausgleich besser gestellt wären.

Um diesen Verteilungseffekt zu quantifizieren, wollen wir bestimmen, in welchem Maße die einzelnen Rentnergenerationen an der Kapitalmarktentwicklung partizipieren. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der *Generationenrendite* ein, den wir im Folgenden präzisieren.

Hierzu betrachten wir die (Rentner-) Generation $G = G(t)$, die zum Zeitpunkt t mit insgesamt $L_z(t)$ Personen des Alters z dem Rentenkollektiv bzw. Pensionsfonds beiträgt.

Mit Beitritt zahlt diese Generation einen Einmalbeitrag in Höhe von

$$EP(t) = f r(t) a(z, t, t-1) L_z(t).$$

Zum Zeitpunkt $t+k$ ($k=0, \dots, \omega-z$) umfasst diese Generation $L_{z+k}(t+k)$ Überlebende, die jeweils eine Rente in Höhe von $r(t+k) = r(0) \exp(\varepsilon(0) + \dots + \varepsilon(t+k-1))$ erhalten. Wir bezeichnen mit CF_G den Cashflow aller Rentenzahlungen an die Personen der Generation G vom Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt $t+\omega-z$. Es gilt

$$CF_G = (L_z(t) r(t), L_{z+1}(t+1) r(t+1), \dots, L_\omega(t+\omega-z) r(t+\omega-z)).$$

Als *Rendite der Generation G* bezeichnen wir den Zinssatz μ_G , für den der Barwert dieses Cashflows der Einmalprämie dieser Generation entspricht, also

$$EP(t) = BW(CF_G, \mu_G) := \sum_{k=0}^{\omega-z} L_{z+k}(t+k) r(t+k) \exp(-k \mu_G). \quad (\text{Gl. 18})$$

Der Cashflow CF_G bzw. die Generationenrendite μ_G hängt von der Sterblichkeitsentwicklung und von der Kapitalmarktentwicklung ab, getrieben von den stochastischen Prozessen W_t und W'_t . CF_G bzw. μ_G hängt natürlich auch von den Managemententscheidungen ab, diese jedoch hängen ihrerseits von der Sterblichkeits- und von der Kapitalmarktentwicklung ab. Die Zufallsvariable $\mu_G = \mu_{G(t)}$ realisiert sich erst zum Zeitpunkt $t+\omega-z$.

Bemerkung

(Gl. 18) ist gleichbedeutend mit

$$f \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t, t-1) \exp(-k\mu) = \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t, t+k) \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1} (\mu_G - \varepsilon(t+j))\right) \quad (\text{Gl. 19})$$

Begründung hierfür: Da $\frac{L_{t+k}(z+k)}{L_t(z)} = {}_k p_z(t, t+k)$ erhalten wir

$$\frac{EP(t)}{r(t)L_z(t)} = f a(z, t, t-1) = f \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t, t-1) \exp(-k\mu) \text{ und}$$

$$\frac{BW(CF_G, \mu_G)}{L_z(t) r(t)} = \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t, t+k) \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon(t+j)\right) \exp(-k\mu_G).$$

3 Asset Liability Management für den Pensionsfonds

Im Folgenden unterstellen wir einen hinlänglich großen Bestand von Rentnern, so dass wir das idiosynkratischen Risiko nicht gesondert berücksichtigen müssen. Im Anhang (Abschnitt 5.1, Gl. 36) wird gezeigt, wie das bei kleinen Beständen relevante idiosynkratische Risiko durch eine entsprechend Auffassung des Faktors σ_α berücksichtigt werden kann.

3.1 Fortschreibung der Aktiva und Passiva

Für $t = 0, 1, \dots, T$ ist $P(t)$ den Wert des Portfolios *nach* Zugang der Finanzierungsbeiträge des Neuzugangs ($EP(t)$) und *vor* Auszahlung der fälligen Renten ($r(t)L(t)$). Somit gilt

$$P(t+1) = (P(t) - r(t)L(t)) \exp(\mu_p(t) + \sigma(t)(W_{t+1} - W_t)) + EP(t+1),$$

mit $\mu_p(t) := \bar{\mu} + \sigma(t) r_M - \frac{1}{2} \sigma^2(t)$.

Von einem *rechnungsmäßigen Verlauf* des Bestandes wollen wir sprechen, wenn

- bei Wahl der Risikoexposition $\sigma(t)$ die Kapitalanlagen sich mit der *erwarteten* Portfoliorendite $\mu_p(t) = \bar{\mu} + \sigma(t) r_M - \frac{1}{2} \sigma^2(t)$ verzinsen - vgl. (Gl. 7),
- die tatsächliche Anzahl der Überlebenden $L_{x+1}(t+1) = p_x(t, t+1) L_x(t)$ mit der zum Zeitpunkt t *geschätzten* Anzahl der Überlebenden $L_{x+1}^{(e)}(t+1) := p_x(t, t) L_x(t)$ für $x = z, \dots, \omega - 1$ überstimmt.

Entsprechend bezeichnen wir mit $P^{(e)}(t+1)$ bzw. $V^{(e)}(t+1)$ bzw. $v^{(e)}(t+1)$ das unter der Annahme eines rechnungsmäßigen Verlaufs auf den Zeitpunkt $t+1$ hochgerechnete Portfolio bzw. die (normierte) Deckungsrückstellung. Da wir den Neuzugang als bekannt voraussetzen und auch der Einmalbeitrag des Neuzugangs auf der Grundlage der zum Zeitpunkt t geschätzten Rentenbarwerte berechnet wird, können wir zum Zeitpunkt t unter der Annahme eines rechnungsmäßigen Verlaufs Wert der Kapitalanlagen

$P^{(e)}(t+1)$ und die Deckungsrückstellung $V^{(e)}(t+1)$ zum Zeitpunkt $t+1$ bestimmen. Es gilt

$$P^{(e)}(t+1) = (P(t) - r(t)L(t)) \exp(\mu_p(t)) + EP(t+1) \tag{Gl. 20}$$

$$V^{(e)}(t+1) = r(t+1) a(z, t+1, t) L_z(t+1) + \exp(\mu + \varepsilon(t))(V(t) - r(t) L(t)) \quad (\text{Gl. 21})$$

$$v^{(e)}(t+1) = a(z, t+1, t) L_z(t+1) + \exp(\mu)(v(t) - L(t)) \quad (\text{Gl. 22})$$

Begründung hierfür:

(Gl. 20) ist klar, (Gl. 21) folgt aus (Gl. 22). Zum Beweis von (Gl. 22) ist zunächst zu beachten, dass $a(x+1, t+1, t) L_{x+1}^{(e)}(t+1) = \exp(\mu)(a(x, t, t) - 1) L_x(t)$ - vgl. (Gl. 1). Somit

$$\begin{aligned} \text{folgt: } v^{(e)}(t+1) &= \sum_{x=z}^{\omega} a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1) \\ &= a(z, t+1, t) L_z(t+1) + \exp(\mu) \sum_{x=z}^{\omega-1} (a(x, t, t) - 1) L_x(t) \\ &= a(z, t+1, t) L_z(t+1) + \exp(\mu) \left(\sum_{x=z}^{\omega} a(x, t, t) L_x(t) - L(t) \right) \\ &= a(z, t+1, t) L_z(t+1) + \exp(\mu)(v(t) - L(t)). \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. $P^{(e)}(t+1)$ ist *nicht* das erwartete Vermögen $\mathbf{E}(P(t+1)|W_t = w_t)$, sondern das mit der *erwarteten Rendite* $\mu_p(t) = \mathbf{E}(\mu_p(t) + \sigma(t)(W_{t+1} - W_t)|W_t = w_t)$ hochgerechnete Vermögen.
2. Ebenso ist $V^{(e)}(t+1)$ *nicht* die erwartete Deckungsrückstellung zum Zeitpunkt $t+1$, sondern die mit den *geschätzten* Überlebenswahrscheinlichkeiten hochgerechnete Deckungsrückstellung – vgl. Bemerkung 5 in Abschnitt 2.4.3.

3.2 Strukturparameter des Rentenbestandes

Die Stochastik des Rentenbestandes (Anzahl der Überlebenden, Deckungsrückstellung) hängt natürlich wesentlich von der Struktur des Bestandes ab. Wir definieren daher drei Kenngrößen, die die Struktur bzw. die Dynamik eines Rentenbestandes charakterisieren. Wir setzen

$$\lambda_t := \frac{L(t)}{v(t)}, \quad \nu_t := \frac{L_z(t+1)a(z, t+1, t)}{v^{(e)}(t+1)}, \quad \xi_t := \ln \left(\frac{v^{(e)}(t+1)}{v(t)} \right).$$

Bemerkungen:

1. $\lambda_t = \frac{r(t)L(t)}{V(t)}$ können wir als *Liquiditätsquote* des Bestandes interpretieren, sie gibt an, welcher Anteil der Deckungsrückstellung unmittelbar fällig ist.
2. ν_t ist das relative Gewicht des Neuzugangs am gesamten Verpflichtungsvolumen, wobei zu beachten ist, dass ν_t zum Zeitpunkt t auf Basis der geschätzten Werte bestimmt wird.
3. $\xi_t = \ln\left(\frac{V^{(e)}(t+1)}{V(t)}\right) - \varepsilon(t)$ ist das um den Rentenerhöhungseffekt korrigierte Bestandswachstum, geschätzt auf der Basis der zum Zeitpunkt t vorliegenden Informationen. Diese Quote wird vom Neugeschäft beeinflusst, allerdings auch vom Sterblichkeitstrend.
4. Für die Strukturparameter ν_t, ξ_t wählen wir den Zeitindex t und nicht $t+1$, um zu verdeutlichen, dass diese Größen zum Zeitpunkt t beobachtet werden.
5. Zwischen diesen Strukturparametern besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{1-\nu_t}{1-\lambda_t} = \exp(\mu - \xi_t) \text{ und } \lambda_t = 1 - (1-\nu_t)\exp(\xi_t - \mu).$$

Die Entwicklung der Strukturparameter in der Zeit für verschiedene Neuzugangsszenarien wird in Abb. 10 (Abschnitt 4.2) illustriert.

3.3 ALM Strategie

3.3.1 Allgemeine Darstellung

In unserem Modell sind die stochastischen Prozesse (W_t) und (W'_t) , der Anfangsbestand, der jährliche Neuzugang $L_z(t)$ sowie die Einstiegsprämien der Neurentner $EP(t)$ exogene Größen. Wir unterstellen, dass der Rentenbestand sich selbst tragen muss. Insbesondere gibt es also keinen externen Kapitalgeber, der dem Kollektiv Mittel zuschießen bzw. Mittel entziehen könnte.

Die Bewertung der Aktiva und Passiva des Pensionsfonds erfolgt nach Zeitwerten. Hierbei betrachten wir allerdings im Kapitalmarktmodell den sicheren Zins $\bar{\mu}$ als konstant.

Entsprechend unterstellen wir auch einen konstanten Rechnungszins μ . Für die Modellrechnungen (Kapitel 4) werden wir stets $\mu = \bar{\mu}$ setzen. Der Rechnungszins ist also der Zins, der risikolos am Kapitalmarkt erzielt werden kann – es sind also keine Sicherheitsmargen eingerechnet. Die biometrischen Rechnungsgrundlagen, die für die Berechnung der Deckungsrückstellungen zugrunde gelegt werden, enthalten ebenfalls keine Sicherheitsabschläge und basieren jeweils auf der aktuellen Schätzung der Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Aktiva und Passiva unterliegen zunächst einmal stochastischen Einflüssen, die von den Prozessen (W_t) und (W'_t) getrieben werden. Ferner sind der Anfangsbestand und der Neuzugang und dessen Finanzierungsbeitrag aus Sicht des Pensionsfonds nicht beeinflussbare Größen. Durch die

- Festlegung der *Risikoexposition* $\sigma(t)$ der Kapitalanlagen (*Asset Management*)

und die

- Festlegung der *Anpassungsrate* $\varepsilon(t)$ der fälligen Renten (*Liability Management*)

können aber Aktiva und Passiva beeinflusst bzw. gesteuert werden.

Asset Liability Management (*ALM*) bedeutet, dass die Festlegung der Risikoexposition und der Rentenanpassung aufeinander abzustimmen sind. Da die Bilanz keine Eigenkapitalposition enthält, somit also keine externe Finanzierungsquelle zur Verfügung steht, muss das *ALM* so erfolgen, dass *mit großer Wahrscheinlichkeit* zu jedem Zeitpunkt die Assets die Liabilities überdecken, dass also $P(t) \geq V(t)$ gilt. Wir wollen diese Bedingung etwas allgemeiner fassen und fordern, dass

$$\rho(t) = \ln \left(\frac{P(t)}{V(t)} \right) \geq \rho_{\min} \quad \text{für ein vorgegebenes } \rho_{\min}. \quad (\text{Solvenzbedingung})$$

Wir bezeichnen ρ_{\min} als *Mindest-Solvaquote*, wobei wir das Unterschreiten als Auslöser eines diskretionären Eingriffs (etwa durch ein Aufsichtsorgan) interpretieren. ρ_{\min} kann durchaus eine negative Größe darstellen, wenn nämlich eine *temporäre* Unterdeckung des Pensionsfonds toleriert wird.

Bevor wir unser Modell formal beschreiben, soll zunächst die Grundidee der *ALM*-Steuerung dargestellt werden.

Basis des *ALM* ist die Bestimmung eines *Zielreservequote* ρ_{Ziel} und einer *strategischen Risikoexposition* σ_{Ziel} , die aus Sicht des Pensionsmanagers eine *Gleichgewichtssituation*

markieren. Wenn die aktuelle Reservequote $\rho(t)$ der *Zielreservequote* ρ_{Ziel} entspricht, so soll auch die gewählte (taktische) Risikoexposition $\sigma(t)$ der *strategischen Risikoexposition* σ_{Ziel} entsprechen. Bei der Festlegung des *strategischen ALM-Gleichgewichts* $(\rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel})$ ist natürlich darauf zu achten, dass σ_{Ziel} und ρ_{Ziel} zueinander passen. Eine hohe strategische Risikoexposition verlangt angesichts der *Solvenzbedingung* (s.o.) eine passende Reservequote; auf dieses Problem wird weiter unten eingegangen. Wir wollen jedoch unterstellen, dass $\rho_{Ziel} \geq 0$ und $\sigma_{Ziel} \geq 0$.

Wenn das strategische ALM-Gleichgewicht $(\rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel})$ feststeht, ist das Bestreben des Pensionsmanager darauf gerichtet, diesen Gleichgewichtszustand zu erreichen. Hierzu vergleicht der Pensionsmanager zu Beginn jedes Jahres die *Ist-Reservequote* $\rho(t)$ mit der *Zielreservequote*. Ist dann $\rho(t) < \rho_{Ziel}$, so wird die Rentenanpassung so gewählt, dass sich im Folgejahr die Reservequote verbessert bzw. die Reservelücke $\rho_{Ziel} - \rho(t)$ verringert wird. Ebenso wird der Pensionsmanager möglicherweise bestrebt sein, die Risikoexposition nach unten hin anzupassen, um eine Gefährdung der Solvabilitätsbedingung zu vermeiden. Beobachtet er einen Reserveüberhang, d.h. $\rho(t) > \rho_{Ziel}$, so besteht Spielraum für zusätzliche Rentenanpassung, was wiederum zu einem Abschmelzen des Überhangs führt. Entsprechend wird er bei einer Reserveüberdeckung Spielraum sehen, die Risikoexposition über σ_{Ziel} hinaus zu erhöhen

Zu Präzisierung der ALM-Regeln setzen wir $u(t) := \rho(t) - \rho_{Ziel}$ und setzen

$$\sigma(t) = \sigma_{Ziel} + a(u(t)) \quad \text{mit Nebenbedingung } 0 \leq \sigma(t) \leq \sigma_M \quad (AM\text{-Regel - Gl. 23})$$

$$\varepsilon(t) = \mu_p(t) - \mu + \theta(u(t)), \quad (LM\text{-Regel - Gl. 24})$$

wobei $\mu_p(t) = \bar{\mu} + \sigma(t)r_M - \frac{1}{2}\sigma^2(t)$ für die *erwartete Portfoliorendite* bei Wahl der Risikoexposition $\sigma(t)$ darstellt.

$a(u)$ und $\theta(u)$ sind Anpassungsfunktionen, die steuern, wie schnell die Risikoexposition und die Rentenhöhe bei einem *Reserveüberschuss* ($u(t) > 0$) bzw. einer *Reservelücke* ($u(t) < 0$) angepasst werden.

Die Nebenbedingung in der *AM-Regel* ist erforderlich, da ohne diese im diskreten Modell eine negative Risikoexposition nicht ausgeschlossen werden kann. Darüber hinaus

soll sichergestellt werden, dass die Aktienquoten nicht über 100% liegen soll.¹⁶ Weitere Nebenbedingungen sind denkbar, z.B. eine untere oder obere Schranke für die Rentenanpassung bzw. für die Risikoexposition. Dies soll weiter unten untersucht werden. Man beachte, dass die *LM-Regel* den Fall $\varepsilon(t) < 0$, also eine Rentenkürzung, nicht grundsätzlich ausschließt.¹⁷

Der Spezialfall $a(u) \equiv 0$ verdient eine gesonderte Betrachtung. In den Modellrechnungen des Kapitels 4 werden wir uns auf diesen Fall beschränken. Ist $a(u) \equiv 0$, so können wir von einer *reinen Liability-Strategie* sprechen, denn die ALM-Steuerung nimmt nur noch Einfluss auf die Passivseite. Eine reine Liability-Strategie vermeidet insbesondere eine prozyklische Anlagestrategie. Kommt es nämlich infolge eines Börsencrashes dazu, dass die Reservequote unter den Zielwert sinkt ($u < 0$), so führt die *LM-Regel* für $a(u) < 0$ dazu, dass in einer Baisse-Phase Aktien verkauft werden müssen. Verzichtet man jedoch auf die Anpassung der Asset-Allokation, so wird es entsprechend schwieriger, die Solvabilitätsbedingung sicherzustellen.

Wenn zum Zeitpunkt t aufgrund der ALM-Regeln (Gl. 23 u. 24) die Steuerungsgrößen $\sigma(t)$ und $\varepsilon(t)$ festgelegt wurden, so kann man unter der Annahme eines *rechnungsmäßigen Verlaufs* die „erwartete“ Reservequote

$$\rho^{(e)}(t+1) := \ln \left(\frac{P^{(e)}(t+1)}{V^{(e)}(t+1)} \right)$$

zum Zeitpunkt $t+1$ bestimmen.

Proposition 1

Ist $\sigma(t)$ die konstante Risikoexposition für das Zeitintervall $[t, t+1]$ und $\varepsilon(t)$ die Rentenanpassung zum Zeitpunkt $t+1$, so gilt:

$$\rho^{(e)}(t+1) = \ln \left(f v_t + \exp(\mu_p(t) - \mu - \varepsilon(t)) \frac{1 - v_t}{1 - \lambda_t} (\exp(\rho(t)) - \lambda_t) \right) \quad (\text{Gl. 25})$$

$$\rho(t+1) = \rho^{(e)}(t+1) + X_{t+1} - Y_{t+1} \quad (\text{Gl. 26})$$

¹⁶ Ließe man ein kreditfinanziertes Aktieninvestment zu, so wären Aktienquoten von über 100% möglich.

¹⁷ Man beachte, dass nach deutschem Recht *regulierte Pensionskassen* regelmäßig als Notfallmaßnahme eine Rentenkürzung vorsehen.

mit den stochastischen Prozessen $X_t := \ln\left(\frac{P(t)}{P^{(e)}(t)}\right)$ und $Y_t := \ln\left(\frac{v(t)}{v^{(e)}(t)}\right) = \ln\left(\frac{V(t)}{V^{(e)}(t)}\right)$.

Beweis

Aus (Gl. 20 u. 21) folgt

$$\frac{P^{(e)}(t+1)}{V^{(e)}(t+1)} = \exp(\mu_p(t)) \left(\frac{P(t)}{V^{(e)}(t+1)} - \frac{r(t)L(t)}{V^{(e)}(t+1)} \right) + \frac{EP(t+1)}{V^{(e)}(t+1)}.$$

Man rechnet nun leicht nach, dass

$$\frac{P(t)}{V^{(e)}(t+1)} = \exp(\rho(t) - \varepsilon(t) - \xi_t) = \exp(\rho(t) - \varepsilon(t) - \mu) \frac{1 - v_t}{1 - \lambda_t},$$

$$\frac{r(t)L(t)}{V^{(e)}(t+1)} = \exp(-\varepsilon(t)) \lambda_t \exp(-\xi_t) = \exp(-\varepsilon(t) - \mu) \lambda_t \frac{1 - v_t}{1 - \lambda_t} \quad \text{und} \quad \frac{EP(t+1)}{V^{(e)}(t+1)} = f v_t.$$

Hieraus folgt (Gl. 25); (Gl. 26) ist offensichtlich.

□

Bemerkungen

1. Die „erwartete“ Reservequote $\rho^{(e)}(t+1)$ basiert auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt t ; X_{t+1} bzw. Y_{t+1} sind die stochastische Komponenten der Kapitalmarktentwicklung bzw. der Sterblichkeitsentwicklung im Zeitraum $[t, t+1]$ und realisieren sich zum Zeitpunkt $t+1$.
2. Die Darstellungen in (Gl. 25 und 26) gelten unabhängig vom gewählten Kapitalmarkt- und Sterblichkeitsmodell.
3. Für $w_{t+1}^\Delta := W_{t+1} - W_t$ gilt:

$$P(t+1) = (P(t) - r(t)L(t)) \exp(\mu_p(t) + \sigma(t) w_{t+1}^\Delta) + EP(t+1)$$

und somit folgt

$$X_{t+1} = \ln\left(\zeta_t + \exp(\sigma(t) w_{t+1}^\Delta)(1 - \zeta_t)\right) \approx (1 - \zeta_t) \sigma(t) w_{t+1}^\Delta, \quad (\text{Gl. 27})$$

wobei $\zeta_t := \frac{EP(t+1)}{P^{(e)}(t+1)} = v_t \exp(-\rho^{(e)}(t+1))$.

Der stochastische Prozess hängt primär von der Kapitalmarktentwicklung ab. Der Prozess wird aber auch beeinflusst von $EP(t+1)$ und somit von der Rentenhöhe

bzw. der ALM-Steuerung. Angesichts der Größenordnung des Strukturparameters v_t (vgl. Abb. 10 in Abschnitt 4.2) kann man bei 1-jähriger Betrachtungsweise

$$X_{t+1} \approx \sigma(t) w_{t+1}^\Delta \text{ annähern.}$$

4. Man beachte, dass Y_{t+1} ausschließlich von der Sterblichkeitsentwicklung abhängt. Y_{t+1} ist unabhängig von der Rentenhöhe und somit auch unabhängig von der ALM-Steuerung.
5. Bei rechnermäßigem Verlauf gilt $X_t = Y_t = 0$.

3.3.2 Konkretisierung der ALM-Regeln

Die Darstellung in (Gl. 25) zeigt, wie die Wahl von $\varepsilon(t)$ die „erwartete“ Reservequote beeinflusst. Lösen wir diese Gleichung nach $\varepsilon(t)$ auf, so erhalten wir unter Verwendung der Strukturparameter λ_t und v_t :

$$\varepsilon(t) = \mu_p(t) - \mu + \ln \left(\frac{1 - v_t}{1 - \lambda_t} \frac{\exp(\rho(t)) - \lambda_t}{\exp(\rho^{(e)}(t+1)) - f v_t} \right). \quad (\text{Gl. 28})$$

Die Darstellung in (Gl. 28) ist wohldefiniert, wenn wir zum Zeitpunkt t unterstellen, dass $P(t) > r(t)L(t)$, also das Vermögen des Pensionsfonds zumindest ausreicht um die fälligen Leistungen auszuzahlen. Es gilt nämlich

$$\exp(\rho^{(e)}(t+1)) - f v_t > 0 \Leftrightarrow \frac{P^{(e)}(t+1)}{V^{(e)}(t+1)} > \frac{EP(t+1)}{V^{(e)}(t+1)} \Leftrightarrow P(t) > r(t)L(t)$$

$$\text{und } \exp(\rho(t)) - \lambda_t > 0 \Leftrightarrow P(t) > r(t)L(t).$$

(Gl. 28) gibt an, wie die Renten anzupassen sind, so dass sich bei rechnermäßigem Verlauf eine Reservequote von $\rho^{(e)}(t+1)$ einstellt. Die Rentenanpassung $\varepsilon(t)$ besteht aus einem Zinsanteil $\mu_p(t) - \mu$ („Überzins“) und einer *Strukturkomponente*, die von der Asset-Allokation unabhängig ist.

Wir haben oben dargestellt, dass der Kern der ALM-Strategie darin besteht, die Reservequote auf dem Niveau der Zielreservequote ρ_{Ziel} zu halten bzw. darin, eine Reserve-lücke $u(t) < 0$ bzw. einen Reserveüberhang $u(t) > 0$ aufzufüllen bzw. abzubauen. Aufgrund der Stochastik der Portfolio- und der Sterblichkeitsentwicklung kann die Reservequote der Folgeperiode nicht festgelegt werden. Es besteht lediglich die Möglichkeit,

die ALM-Entscheidung so zu treffen, dass zumindest „im Durchschnitt“ eine bestimmte Annäherung an das Reserveziel erreicht werden kann.

Unsere Beobachtungen fassen wir in folgender Proposition zusammen:

Proposition 2

Setzen wir für $\alpha \in [0, 1]$ $\theta_t(\alpha, u) := \ln \left(\frac{1 - v_t}{1 - \lambda_t} \frac{\exp(\rho_{Ziel} + u) - \lambda_t}{\exp(\rho_{Ziel} + (1 - \alpha)u) - f v_t} \right)$ und

$$\varepsilon(t) := \mu_p(t) - \mu + \theta_t(\alpha, u(t)), \tag{Gl. 29}$$

dann gilt $\rho^{(e)}(t+1) = \alpha \rho_{Ziel} + (1 - \alpha)\rho(t)$ und

$$\rho(t+1) = \rho(t) - \alpha (\rho(t) - \rho_{Ziel}) + X_{t+1} - Y_{t+1} \tag{Gl. 30}$$

$$u(t+1) = (1 - \alpha) u(t) + X_{t+1} - Y_{t+1} \tag{Gl. 31}$$

□

Dies bedeutet, dass bei dieser Wahl der Rentenanpassung nach (Gl. 29) die Reserveabweichung „im Durchschnitt“ um den Faktor $1 - \alpha$ gemindert wird.

Bemerkungen

1. (Gl. 30) zeigt, dass $(\rho(t))_{t \geq 0}$ ein *Mean-Reversion* Prozess (im weiteren Sinne) darstellt. Der Prozess ist allerdings nur für ganzzahlige t definiert, auch sind die Störgrößen $X_{t+1} - Y_{t+1}$ nicht normalverteilt.
2. Es gilt:

Für $u = 0$ ist $\theta_t := \theta_t(\alpha, 0) = \ln \left(\frac{1 - v_t}{1 - \lambda_t} \frac{1 - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})}{1 - f v_t \exp(-\rho_{Ziel})} \right)$ unabhängig von α und

$$\frac{\partial \theta_t(\alpha, u)}{\partial u} = \frac{1}{1 - \lambda_t \exp(-(u + \rho_{Ziel}))} - \frac{1 - \alpha}{1 - \exp(-((1 - \alpha)u + \rho_{Ziel})) f v_t},$$

$$\theta'_t(\alpha) := \left. \frac{\partial \theta_t(\alpha, u)}{\partial u} \right|_{u=0} = \frac{1}{1 - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})} - \frac{1 - \alpha}{1 - \exp(-\rho_{Ziel}) f v_t}$$

Man kann sich davon überzeugen, dass lineare Approximation $\theta_t(\alpha, u) \approx \theta_t + \theta'_t(\alpha) u$ bei einer realistischen Kalibrierung sehr gut ist.

Da $\theta_t > 0 \Leftrightarrow (\exp(\mu - \xi_t) - 1)(\exp(\rho_{Ziel}) - 1) > -(f - 1)v_t$, ist von extremen Konstellationen abgesehen stets $\theta_t > 0$.

3. Im Gleichgewichtszustand $u(t) = \rho(t) - \rho_{Ziel} = 0$ können wir $\varepsilon(t) = \mu_p(t) - \mu + \theta_t$ als *reserveneutrale* Rentenanpassung interpretieren. Dies bedeutet, dass der Überzins $\mu_p(t) - \mu$ zuzüglich einer *Reservebeteiligung* θ_t an die Rentner weitergegeben werden kann, ohne dass dabei die Reservequote leidet. Die Reservebeteiligung θ_t im Gleichgewichtszustand ist unabhängig von der Anpassungsgeschwindigkeit α , jedoch strukturabhängig.

4. Setzen wir speziell $f = \exp(\rho_{Ziel})$, so gilt

$$\theta_t(\alpha, u) = \ln\left(\frac{1 - v_t}{1 - \lambda_t}\right) + \ln\left(\frac{\exp(u) - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})}{\exp((1 - \alpha)u) - v_t}\right) \text{ und}$$

$$\theta_t'(\alpha) = \frac{1}{1 - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})} - \frac{1 - \alpha}{1 - v_t}.$$

In diesem Fall gilt $\theta_t = \ln\left(\frac{1 - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})}{1 - \lambda_t}\right) \approx \frac{\lambda_t}{1 - \lambda_t} \rho_{Ziel}$ - im Gleichgewichtszustand ist also die Reservebeteiligung ungefähr proportional zur Zielreservequote.

5. $f = \exp(\rho_{Ziel})$ bedeutet, dass der Neuzugang unabhängig von der aktuellen Reservequote des Pensionsfonds immer denselben Sicherheitszuschlag zahlen muss. Können sich die Neurentner frei entscheiden, ob Sie dem Pensionsfonds beitreten oder nicht, fördert die Regel $f = \exp(\rho_{Ziel})$ ein *opportunistisches* Verhalten. Ist nämlich die aktuelle Reservequote kleiner als die Zielreservequote, so ist der Beitritt zum Pensionsfonds möglicherweise nicht attraktiv, da die Neurentner damit rechnen, dass sie zum Aufbau der Reserve beitragen müssen. Ist umgekehrt die aktuelle Reserveposition höher als die Zielreservequote, so belastet der Neuzugang das Kollektiv und die Neurentner würden von einer künftigen Absenkung der Reservequote auf die Zielgröße durch tendenziell höhere Renten profitieren, ohne sich selbst an der Finanzierung beteiligt zu haben.

6. Ein opportunistisches Verhalten der Neurentner kann vermieden werden, wenn wir verlangen, dass $f = \exp(\rho^{(e)}(t+1)) = \exp(\rho_{Ziel} + (1-\alpha)u(t))$. In diesem Falle erhalten wir

$$\theta_t(\alpha, u) = \ln\left(\frac{1 - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel} - u)}{1 - \lambda_t}\right) + \alpha u \text{ und}$$

$$\varepsilon(t) = \mu_p(t) - \mu + \ln\left(\frac{1 - \lambda_t \exp(-\rho(t))}{1 - \lambda_t}\right) + \alpha u. \quad (\text{Gl. 32})$$

Die Rentenanpassung umfasst neben dem Überzins eine Reservebeteiligung von $\ln\left(\frac{1 - \lambda_t \exp(-\rho(t))}{1 - \lambda_t}\right) \approx \frac{\lambda_t \rho(t)}{1 - \lambda_t}$, die unabhängig von α ist, und eine „Solidarumlage“ αu , die proportional zur Abweichung zwischen Soll- und Zielreserve ist.

7. Wir wollen die beiden Regeln $f = \exp(\rho_{Ziel})$ und $f = \exp(\rho^{(e)}(t+1))$ vergleichen und setzen

$$\theta_t^{(1)}(\alpha, u) = \ln\left(\frac{1 - v_t \exp(u) - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})}{1 - \lambda_t \exp((1-\alpha)u) - v_t}\right) \text{ für } f = \exp(\rho_{Ziel})$$

$$\theta_t^{(2)}(\alpha, u) = \ln\left(\frac{1 - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel} - u)}{1 - \lambda_t}\right) + \alpha u \text{ für } f = \exp(\rho^{(e)}).$$

$$\text{Dann gilt } \theta_t^{(2)}(\alpha, u) - \theta_t^{(1)}(\alpha, u) = \ln\left(\frac{1 - v_t \exp(-(1-\alpha)u)}{1 - v_t}\right) \approx \frac{v_t}{1 - v_t}(1-\alpha)u.$$

Will man also ein opportunistisches Verhalten des Neuzugangs unterbinden und wählt $f = \exp(\rho^{(e)})$ statt $f = \exp(\rho_{Ziel})$, so fallen die Rentenanpassungen bei einem Reserveüberhang ($u > 0$) höher und bei einer Reserverücke ($u < 0$) niedriger aus.

4 Modellrechnungen

4.1 Kalibrierung des Referenzmodells, Simulationsszenarien

Für den Kapitalmarkt unterstellen wir (vgl. Abschnitt 2.3)

$\bar{\mu} = 0.02$	sicherer Zins
$\sigma_M = 0.2$	Volatilität des Marktportfolios
$r_M = 0.25$	Sharpe-Ratio

Dies ergibt für die erwartete Portfoliorendite in Abhängigkeit von der gewählten Risikoexposition $\mu_p(t) = 0.02 + 0.25 \sigma(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t)$.

Ferner setzen wir

$T = 60$	Projektionszeitraum in Jahren. Bezogen auf die Kalibrierung in Abschnitt 2.4.2 entspricht dies dem Zeitraum 2005-2065.
$\mu = \bar{\mu} = 0.02$	konstanter Rechnungszins = sicherer Zins
$\rho(0) = \ln\left(\frac{P(0)}{V(0)}\right) = \rho_{Ziel}$	Wir unterstellen also im Referenzmodell, dass wir von einer Gleichgewichtssituation aus starten.
$a(u) \equiv 0$	Wir unterstellen im Referenzmodell eine reine <i>LM-Strategie</i> mit gleichbleibender Risikoexposition σ_{Ziel}
$f = \exp(\rho_{Ziel})$	Sicherheitsfaktor für die Kalkulation des Neuzugangs. Dies bedeutet, dass der Neuzugang (im Durchschnitt) reserveneutral erfolgt.
$\mu_p := \bar{\mu} + r_M \sigma_{Ziel} - \frac{1}{2} \sigma_{Ziel}^2$	<i>erwartete Portfoliorendite</i> für $\sigma(t) \equiv \sigma_{Ziel}$.

Wir setzen ferner $\theta_t(\alpha, u) = \ln\left(\frac{1 - v_t \exp(u) - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})}{1 - \lambda_t \exp((1 - \alpha)u) - v_t}\right)$ und für die Rentenanpassung gilt $\varepsilon(t) = \mu_p - \mu + \theta_t(\alpha, u)$ - vgl. Proposition 2.

Wie die strategischen ALM-Parameter ρ_{Ziel} , σ_{Ziel} , α zu wählen sind, soll anhand von Monte Carlo-Simulationen bestimmt werden.

Wir führen die Berechnungen für zwei Varianten der Sterblichkeitsentwicklung durch:

Variante 0: Kalibrierung nach Tabelle 1 (Abschnitt 2.4.2) für einen hybriden Bestand, wobei wir allerdings $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ setzen, also mit *trendunabhängigen* Überlebenswahrscheinlichkeiten rechnen.

Variante 1: Kalibrierung nach Tabelle 1 für einen hybriden Bestand mit *trendabhängigen* Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Um einschätzen zu können, welchen Einfluss der Neuzugang auf die Rentenentwicklung hat, untersuchen wir folgende Neuzugangsszenarien (vgl. Abb. 8):

Szenario 0: gleichbleibender Neuzugang von 100 000 65-jährige Personen.

Szenario 1: ein um 1% jährlich wachsender Neuzugang

Szenario 2: ein um 1% jährlich schrumpfender Neuzugang

Szenario 3: Wachstumsrate: 15 Jahre +1%, 30 Jahre -1%, 15 Jahre +1%

Szenario 4: Wachstumsrate: 15 Jahre -1%, 30 Jahre +1%, 15 Jahre -1%.

Schließlich wollen wir die Kombination Variante 1 mit Neuzugang Szenario 0 als *Basisszenario* bezeichnen.

Für alle Szenarien und Berechnungsvarianten legen wir als Anfangsbestand den *Bestand_{XL}* zugrunde (vgl. Abschnitt 2.4.4, Abb. 6), der bezogen auf die Periodensterbetafel im Zeitpunkt $t = 0$ invariant ist, d.h. $L_z(0) = 100\,000$; $L_{x+1}(0) = L_x(0) p(x, 0)$ für $x = z, \dots, \omega$.

Die folgenden Abbildungen 8 und 9 illustrieren die verschiedenen Neuzugangsszenarien sowie die hieraus resultierende Entwicklung der Gesamtzahl der Rentner in den Varianten 0 und 1 bei *deterministischer* Sterblichkeitsentwicklung.

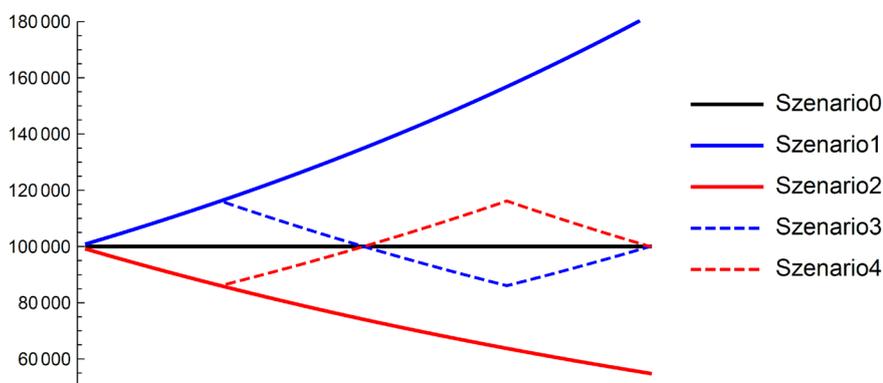


ABBILDUNG 8: Entwicklung des Neuzugangs für die *Szenarien 0-4*.

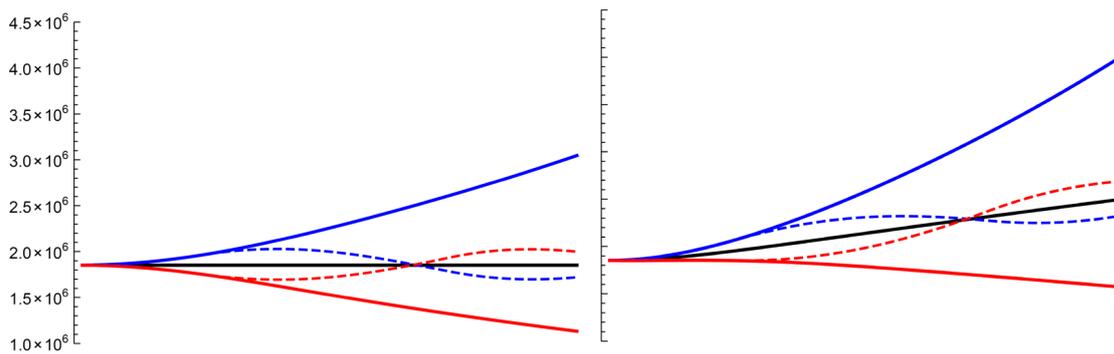


ABBILDUNG 9: Entwicklung Gesamtzahl der Rentner für die Szenarien 0-4 und die Variante 0 und 1 bei deterministischer Sterblichkeitsentwicklung ($\sigma_\alpha = 0$).

4.2 Deterministisches ALM-Modell

Wir führen zunächst einige Modellrechnungen im *deterministischen Fall* durch, d.h. wir unterstellen für die gesamte Laufzeit einen *rechnungsmäßigen Verlauf*, mithin gilt

$X_{t+1} = Y_{t+1} = 0$ (vgl. Proposition 1). Da wir $\rho(0) = \rho_{Ziel}$ und $f = \exp(\rho_{Ziel})$ vorausgesetzt haben, gilt nach Proposition 1 $\rho(t+1) = \rho^{(e)}(t+1) = \rho_{Ziel}$ für alle t , falls die Renten gemäß $\varepsilon(t) = \mu_p - \mu + \theta_t$ mit $\theta_t = \ln\left(\frac{1 - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})}{1 - \lambda_t}\right)$ angepasst werden. Die Renten-

anpassung hängt dann nur von der Liquiditätsquote λ_t und der Zielreservequote ρ_{Ziel} ab.

Zunächst stellen wir den Verlauf der Strukturparameter ν_t , λ_t und ξ_t den Hochrechnungszeitraum von $T=60$ Jahren dar – vgl. Abb. 10. Bei trendunabhängiger Sterblichkeit und konstantem Neuzugang (*Variante 0, Szenario 0*) sind ν_t , λ_t und ξ_t konstant, nämlich $\xi_t = \xi_0 = 0$, $\nu_t = \nu_0 = 0.08218785$ und $\lambda_t = \lambda_0 = 0.10036175$ und

$\theta_t = \theta_0 = 0.02002027$.¹⁸ Beim Vergleich der Varianten 0 und 1 wird deutlich, dass der Sterblichkeitstrend deutlich stärker wirkt als die verschiedenen Neuzugangsszenarien.

¹⁸ Für die Strukturparameter ergeben sich minimale Unterschiede je nachdem, ob die Anzahl der Überlebenden jeder Altersgruppe als ganzzahlig angenommen wird oder ob mit echten Überlebenswahrscheinlichkeiten gemäß (Gl.11) gerechnet wird. Für die Zwecke unserer Untersuchungen sind die Unterschiede jedoch vernachlässigbar. Die hier genannten Werte für (Variante 0, Szenario 0) wurden mit ungerundeten Überlebenswahrscheinlichkeiten berechnet.

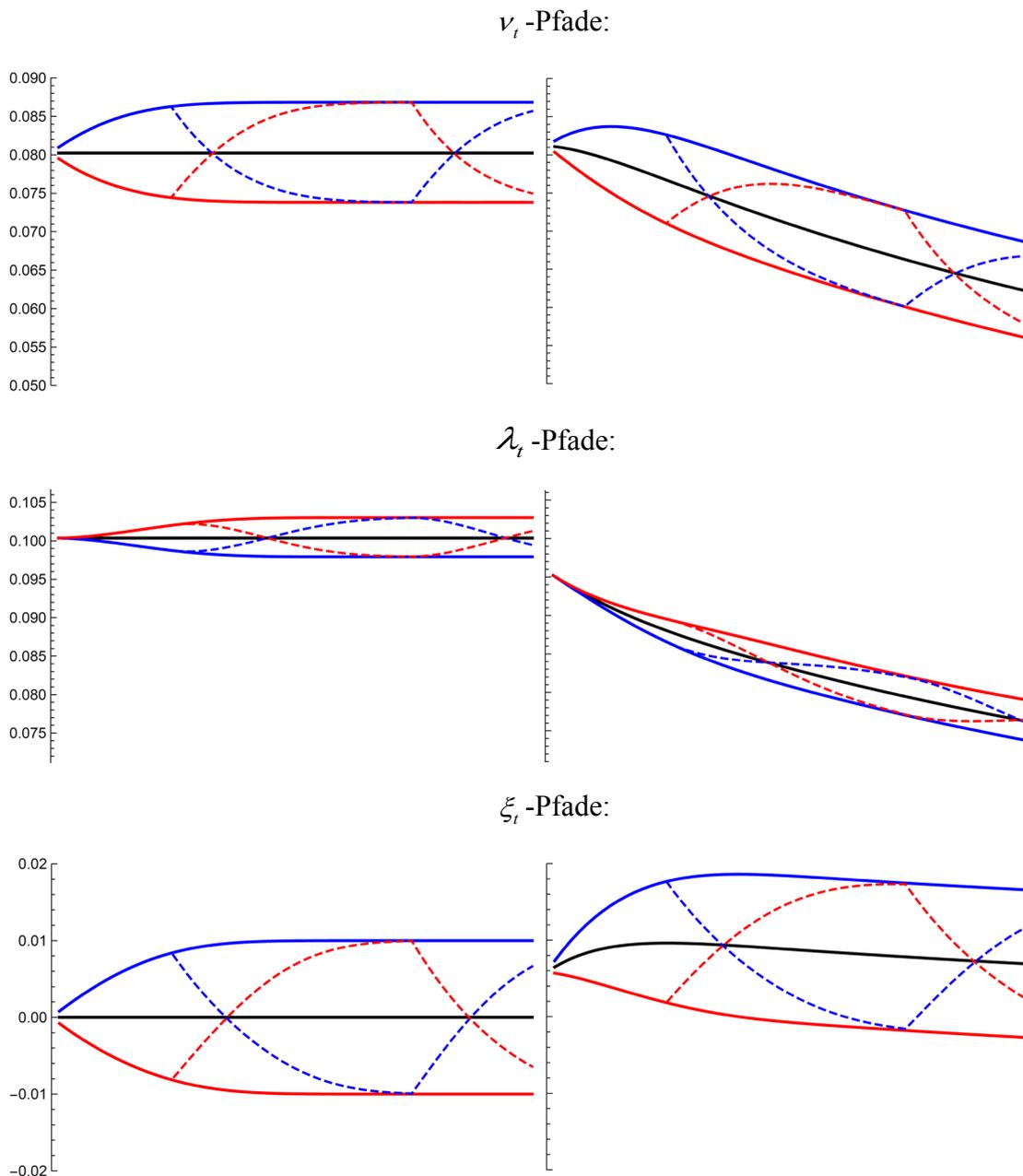


ABBILDUNG 10: Entwicklung der Strukturparameter v_t, λ_t, ξ_t für $t = 1, \dots, T$ für trend-unabhängige (*Variante 0*: links) und trendabhängige Überlebenswahrscheinlichkeiten (*Variante 1*: rechts) für die Szenarien 0-4 im deterministischen Modell ($\sigma_\alpha = 0$).

Die folgende Abbildung 11 zeigt die Entwicklung der *strukturellen Rentenanpassung* θ_t für die verschiedenen Konstellationen; hierbei wurde eine Zielreserve von $\rho_{Ziel} = 0.2$ zugrunde gelegt. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Neuzugangsszenarien sind

eher gering, jedoch ist der Unterschied zwischen den beiden Varianten 0 und 1 sehr ausgeprägt. Während beim Steady-State Bestand (Variante 0) aus der Reserve eine Rentenanpassung von rund 2% p.a. finanziert werden kann, führt der Sterblichkeitstrend in Variante 1 dazu, dass der älter werdende Bestand einen steigenden Anteil der Reserve beansprucht.

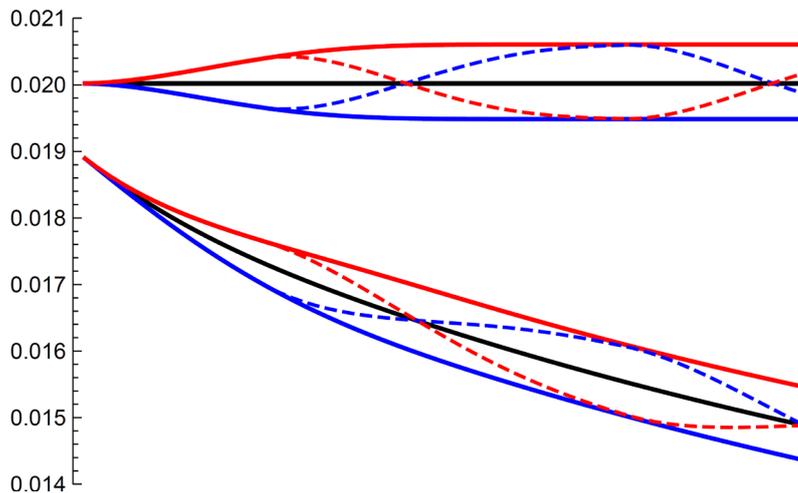


ABBILDUNG 11: Entwicklung von θ_t für $t = 0, \dots, T-1$ für die Szenarien 0-4 für trendunabhängige (Variante 0: oben) und trendabhängige Überlebenswahrscheinlichkeiten (Variante 1: unten); hierbei wurde $\rho_{Ziel} = 0.2$ und $f = \exp(\rho_{Ziel})$ unterstellt.

Generationenrendite im deterministischen Modell

Bei der *aktuariellen Tontine* (vgl. Anhang 5.4) stimmt die Generationenrendite immer mit der Portfoliorendite überein, da die Mittel der Tontine ausschließlich für Rentenzahlungen der entsprechenden Kohorte von Rentner verwendet werden.¹⁹ Im folgenden Abschnitt wollen wir die Generationenrendite im kollektiven Modell, dem Pensionsfonds untersuchen.

Hierzu betrachten wir die Rentnergeneration $G = G(t_0)$, die zum Zeitpunkt t_0 im Alter z in das Rentnenkollektiv eintritt. Zum Zeitpunkt t_0 zahlt die Generation G einen Einmalbeitrag in Höhe von

$$EP(t_0) = f r(t_0) a(z, t_0, t_0 - 1) L_z(t_0) = r(t_0) L_z(t_0) \exp(\rho_{Ziel}) \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k\mu).$$

¹⁹ Im Anhang wird gezeigt, dass bei einer stochastischen Portfoliorendite die *erwartete* Generationenrendite *nicht* mit der *erwarteten* Portfoliorendite übereinstimmt.

Die Höhe der Einmalprämie wird auf der Grundlage der Sterblichkeitsbeobachtungen bis zum Zeitpunkt $t_0 - 1$ festgelegt. Im Fall $t_0 = 0$ setzen wir $a(z, 0, -1) := a(z, 0, 0)$. Da wir einen *rechnungsmäßigen Verlauf* unterstellen, gilt für den Rentenbarwert

$$a(z, t_0, t_0 - 1) = a(z, t_0, t_0) = \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k\mu),$$

und für den Cashflow der Rentenzahlungen für die Generation G gilt

$$CF_G = (L_z(t_0) r(t_0), L_{z+1}(t_0 + 1) r(t_0 + 1), \dots, L_\omega(t_0 + \omega - z) r(t_0 + \omega - z))$$

bzw. ²⁰

$$\frac{CF_G}{L_z(t_0) r(t_0)} = \left(1, p_z(t_0, t_0) \exp(\varepsilon(t_0)), \dots, {}_{\omega-z} p_z(t_0, t_0) \exp\left(\sum_{j=0}^{\omega-z-1} \varepsilon(t_0 + j)\right) \right),$$

$$\text{mit } \varepsilon(t_0 + j) = \mu_P - \mu + \theta_{t_0+j} \text{ und } \theta_t = \ln\left(\frac{1 - \lambda_t \exp(-\rho_{Ziel})}{1 - \lambda_t}\right).$$

Die *Generationenrendite* ist der Zins μ_G , für den gilt

$$f \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k\mu) = \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} (\varepsilon(t_0 + j) - \mu_G)\right).$$

Wir definieren $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\rho_{Ziel})$ implizit so, dass folgende Gleichung erfüllt ist

$$f \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k\mu) = \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k(\mu - \hat{\varepsilon})).$$

$\hat{\varepsilon}$ ist eindeutig bestimmt und entspricht der Rentendynamik, die im Tontinenmodell aus dem Sicherheitszuschlag $f = \exp(\rho_{Ziel})$ finanziert werden kann. Damit erhalten wir folgende implizite Darstellung der Generationenrendite:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k(\mu - \hat{\varepsilon})) \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k(\mu - \hat{\varepsilon})) \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} (\mu_P - \hat{\varepsilon} + \theta_{t_0+j} - \mu_G)\right). \end{aligned} \quad (\text{Gl. 33})$$

²⁰ Hierbei haben wir implizit auf die Ganzzahligkeitsbedingung der Anzahl der überlebenden Rentner verzichtet, was aber in diesem Kontext keine Einschränkung bedeutet.

Vergleicht man die so ermittelte Generationenrendite μ_G mit der (im deterministischen Falle *konstanten*) Portfoliorendite μ_p , so kann man feststellen, in welchem Umfang ein finanzieller Transfer zugunsten oder zu Lasten der Generation stattfindet.

Die Generationenrenditen für die aufeinander folgenden Generationen von Neurentner hängen bei rechnermäßigem Verlauf nur von der jeweiligen Liquiditätsquote λ_t und der Zielreserve ρ_{Ziel} ab.

Die folgende Abbildung 12 illustriert diese Zusammenhänge. Dargestellt werden die Generationenrenditen von 50 aufeinander folgenden Generationen von Neurentnern, wobei zum einen nach den Varianten 0 und 1 und zum anderen nach den Szenarien 0-4 unterschieden wurde. Im Anbetracht der Skalierung der Ordinate sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Rentnergenerationen und der verschiedene Varianten und Szenarien eher gering.

Für die Fallkonstellation (Variante 0/ Szenario 0) ergibt sich eine konstante Generationenrendite von $\mu_G \approx \mu_p$.²¹ Ein wachsender Bestand hat negative Auswirkung auf die Generationenrendite, was dadurch zu erklären ist, dass bei einem wachsenden Bestand ein Teil der Kapitalerträge zur Finanzierung der Reserve verwendet werden muss, um die *Reservequote* konstant zu halten. Mit der gleichen Begründung kann man erklären, dass in der Variante 1 die Generationenrenditen niedriger sind als bei den vergleichbaren Szenarien der Variante 0.

²¹ Auch wenn der Unterschied in der Abbildung 13 nicht erkennbar ist, gilt $\mu_G \neq \mu_p$.

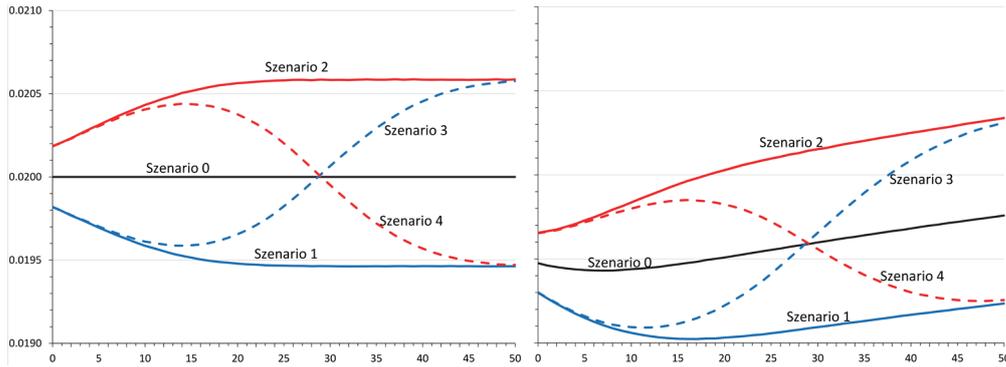


ABBILDUNG 12: Entwicklung der Generationenrendite im Pensionsfonds (kollektives Modell) im deterministischen Fall für die Szenarien 0-4 für trendunabhängige (Variante 0: oben) und trendabhängige Überlebenswahrscheinlichkeiten (Variante 1: unten); hierbei wurde $\mu_p = \mu = 0.02$, $\rho_{Ziel} = 0.2$ und $f = \exp(\rho_{Ziel})$ unterstellt.

Wie die Abb. 12 deutlich zeigt, hat die Bestandsentwicklung Einfluss auf die Generationenrenditen; es findet also ein generationenübergreifender Mitteltransfer statt. Der Effekt dieses Mitteltransfers ist allerdings vergleichsweise gering: Der Unterschied zwischen Szenario 0 und Szenario 1 bzw. 2 macht nur rund 0.05 % aus.

Wir wollen den Spezialfall *Variante 0/ Szenario 0* genauer untersuchen. Der Rentenbestand befindet sich dann in einem *steady state*; insbesondere ist dann der Strukturparameter λ_t konstant, somit auch θ_t . Es ergibt sich $\lambda_t = \lambda_0 = 0.10036175$ und

$$\theta_t = \theta_0 = \ln\left(\frac{1 - \lambda_0 \exp(-\rho_{Ziel})}{1 - \lambda_0}\right). \theta_0 \text{ können wir als Funktion von } \rho_{Ziel} \text{ betrachten.}$$

Die Bestimmungsgleichung der Generationenrendite lautet somit in *steady state*:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k(\mu - \hat{\varepsilon})) \\ = \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k(\mu - \hat{\varepsilon})) \exp(k(\mu_p - \hat{\varepsilon} + \theta_0 - \mu_G)). \end{aligned} \quad (\text{Gl. 34})$$

Auf den ersten Blick ist überraschend, dass in der Regel $\hat{\varepsilon} \neq \theta_0$ und dass somit die Generationenrendite *nicht* mit der Portfoliorendite übereinstimmt; es gilt vielmehr $\mu_p - \mu_G = \hat{\varepsilon} - \theta_0$ – vgl. Tabelle 2. Der Unterschied ist allerdings für $0 \leq \rho_{Ziel} \leq 0.5$ sehr gering, aus praktischer Sicht also vernachlässigbar.

ρ_{Ziel}	$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\rho_{Ziel})$	$\theta_0 = \theta_0(\rho_{Ziel})$	$\mu_P - \mu_G$ $= \hat{\varepsilon}(\rho_{Ziel}) - \theta_0(\rho_{Ziel})$
0.00	0.000000	0.000000	0.00000000
0.05	0.005214	0.005426	-0.00021152
0.10	0.010284	0.010560	-0.00027601
0.15	0.015217	0.015420	-0.00020233
0.20	0.020021	0.020020	0.00000120
0.25	0.024704	0.024377	0.00032680
0.30	0.029271	0.028504	0.00076714
0.35	0.033729	0.032413	0.00131536
0.40	0.038083	0.036118	0.00196499
0.45	0.042340	0.039630	0.00270995
0.50	0.046503	0.042959	0.00354450

Tabelle 2: Rentenanpassung im Steady-State-Bestand, Variante 0, Szenario 0: Vergleich der Generationenrenditen im individuellen Modell ($\mu_G = \mu_P$) und im kollektiven Modell ($\hat{\mu}_G = \mu_P + \theta_0 - \hat{\varepsilon}(\rho_{Ziel})$).

4.3 Stochastische Sterblichkeit bei sicherer Kapitalanlage

Wir untersuchen in diesem Abschnitt isoliert die Wirkung der stochastischen Sterblichkeitsentwicklung. Die Assets werden sicher angelegt, d.h. $\sigma(t) = 0$, das Kapitalmarktrisiko blenden wir also aus. Aufgrund der Kalibrierung gilt dann $\mu_p(t) = \bar{\mu} = \mu$; die Kapitalanlagen erwirtschaften also genau der Rechnungszins.

Bestandsentwicklung

Zunächst illustrieren wir in Abbildung 13 die Wirkung der stochastischen Sterblichkeit auf die Gesamtzahl der Rentner bei Varianten 0 und Varianten 1; wir beschränken uns dabei auf das Szenario 0.

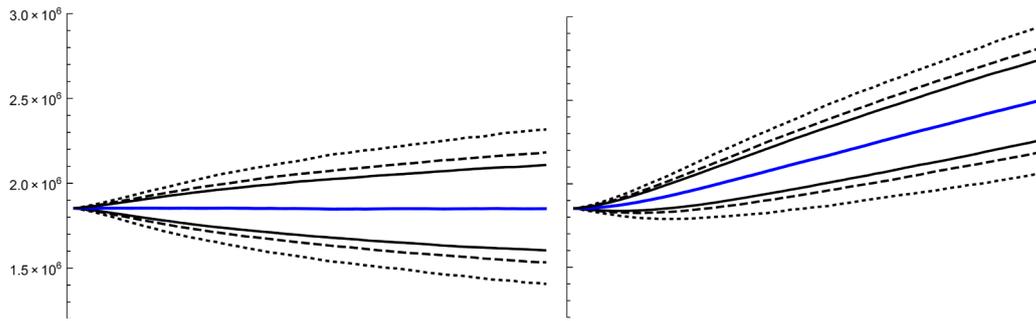


ABBILDUNG 13: Bestandentwicklung (Gesamtzahl der Rentner): Dargestellt sind die 1%, 5%, 10%, 50%, 90%, 95% und 99%-Quantile für 60 Jahre bei gleichbleibendem Neuzugang (Szenario 0) für trendunabhängige (*Variante 0*: links) und trendabhängige Überlebenswahrscheinlichkeiten (*Variante 1*: rechts) bezogen auf den Anfangsbestand $Bestand_{XL}$. Die Berechnungen erfolgte auf Grundlage von 10 000 Simulationsläufen mit $\sigma_{\alpha} = 0.04$.

Rentenanpassung aufgrund der stochastischen Sterblichkeitsentwicklung

Falls $\sigma(t) = 0$, so gilt $X_t \equiv 0$ und $u(t+1) = (1 - \alpha)u(t) - Y_{t+1}$ - vgl. (Gl. 31). Der $u(t)$ -Prozess ist also nur abhängig von der Anpassungsgeschwindigkeit α , der Sterblichkeitsentwicklung und dem Startwert $u(0) = \rho(0) - \rho_{Ziel} = 0$.

Es gilt: $\rho(t) \geq 0$ für alle $t = 0, 1, \dots, T \Leftrightarrow \text{Min}(u(t) : t = 0, 1, \dots, T) \geq -\rho_{Ziel}$.

Werten wir also jeweils das Minimum der $u(t)$ -Pfade aus, so erhalten wir Auskunft darüber, welche Zielreserve bzw. Startreserve erforderlich ist, um eine bilanzielle Unterdeckung (d.h. $\rho(t) < 0$) zu vermeiden.

Wir definieren die *Wahrscheinlichkeit einer Unterdeckung* in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit α und der Zielreservequote ρ_{Ziel} und setzen

$$m(\alpha, \rho_{Ziel}) := \mathbf{P}(\text{Min}(u(t) : t \in \{0, \dots, T\}) < -\rho_{Ziel}).$$

Die folgende Abbildung 14 bzw. die Tabelle 3 zeigt für die Varianten 0 und 1 die 1%- und 5%-Quantile der *erforderlichen Zielreservequote* in Abhängigkeit der Anpassungsgeschwindigkeit α . $\rho_{Ziel}(\alpha)$ ist also der Wert, für den gilt $m(\alpha, \rho_{Ziel}(\alpha)) = 1\%$ bzw.

$m(\alpha, \rho_{Ziel}(\alpha)) = 5\%$. Wählt man beispielsweise eine Anpassungsrate von $\alpha = 0.15$, so bedarf es in der Variante 1 einer Zielreservequote von $\rho_{Ziel} = \rho(0) = 9.35\%$, damit die

Wahrscheinlichkeit einer Unterdeckung im Laufe der 60-jährigen Hochrechnung weniger als 1% beträgt.

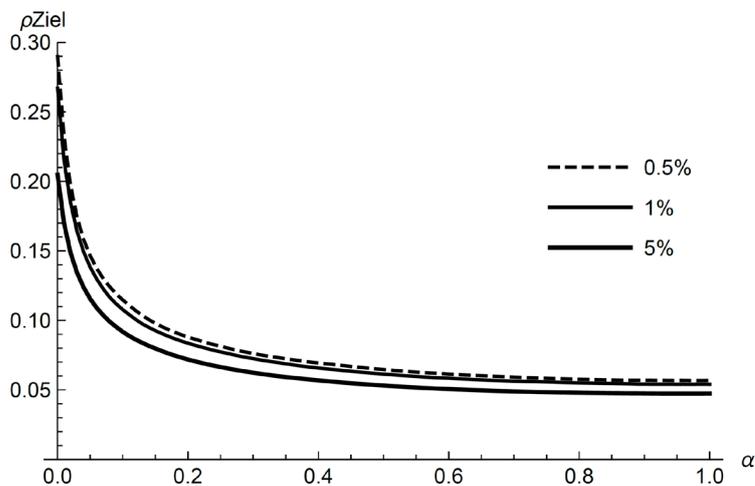


ABBILDUNG 14: Erforderliche Reservequote $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit α bei einem Sicherheitsniveau von 0.5%, 1% bzw. 5% im Basisszenario (*Szenario 0/ Variante 1*). Den Berechnungen erfolgen auf Grundlage von 50 000 Simulationsläufen.

α	Variante 0: ohne Sterblichkeitstrend			Variante 1: mit Sterblichkeitstrend		
	0.5% - Quantil	1% - Quantil	5% - Quantil	0.5% - Quantil	1% - Quantil	5% - Quantil
0	32.96%	30.18%	23.50%	28.98%	26.70%	20.48%
0.05	16.94%	16.08%	13.29%	14.67%	13.84%	11.56%
0.10	13.02%	12.32%	10.53%	19.70%	18.45%	14.86%
0.15	11.39%	10.61%	9.13%	17.41%	16.39%	13.42%
0.20	10.21%	9.54%	8.25%	15.82%	14.93%	12.38%
0.25	9.36%	8.80%	7.62%	14.67%	13.84%	11.56%
0.30	8.74%	8.25%	7.16%	13.75%	12.98%	10.90%
0.35	8.28%	7.83%	6.79%	13.01%	12.27%	10.38%
0.40	7.88%	7.43%	6.50%	12.42%	11.66%	9.91%
0.45	7.57%	7.16%	6.26%	11.90%	11.19%	9.53%
0.50	7.31%	6.95%	6.05%	11.47%	10.77%	9.18%

Tabelle 3: Erforderliche Reservequote $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit α bei einem Sicherheitsniveau von 0.5%, 1% bzw. 5% bei gleichbleibendem Neuzugang (*Szenario 0*) für die *Varianten 0* und *1*.

Auf den ersten Blick überraschend ist, dass der Reservebedarf bei der Variante 1 geringer ist als bei Variante 0. Allerdings ist zu beachten, dass bei Variante 1 der Rentnerbestand insgesamt altert und dass für hohe Alter die relativen Schwankungen der Rentenbarwerte geringer ausfallen.

Der Anpassungsparameter α hat jedoch auch Rückwirkung auf die Rentenanpassung, denn je größer α desto volatiler sind die Rentenanpassungen. Wir beschränken uns auf die Variante 1, da sich die Schar der Graphen bei Variante 0 kaum von der von der Variante 1 unterscheidet. Die Abbildung 15 lässt erkennen, dass das Rentenrisiko gemessen als Volatilität der Rentenanpassung nahezu linear mit der Anpassungsgeschwindigkeit steigt. Interessant ist auch die Beobachtung, dass die Zielreserve nur bei geringen α -Werten nennenswerten Einfluss auf die Volatilität der Renten hat. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass wir bei der Simulation stets $\rho(0) = \rho_{Ziel}$ unterstellt haben.

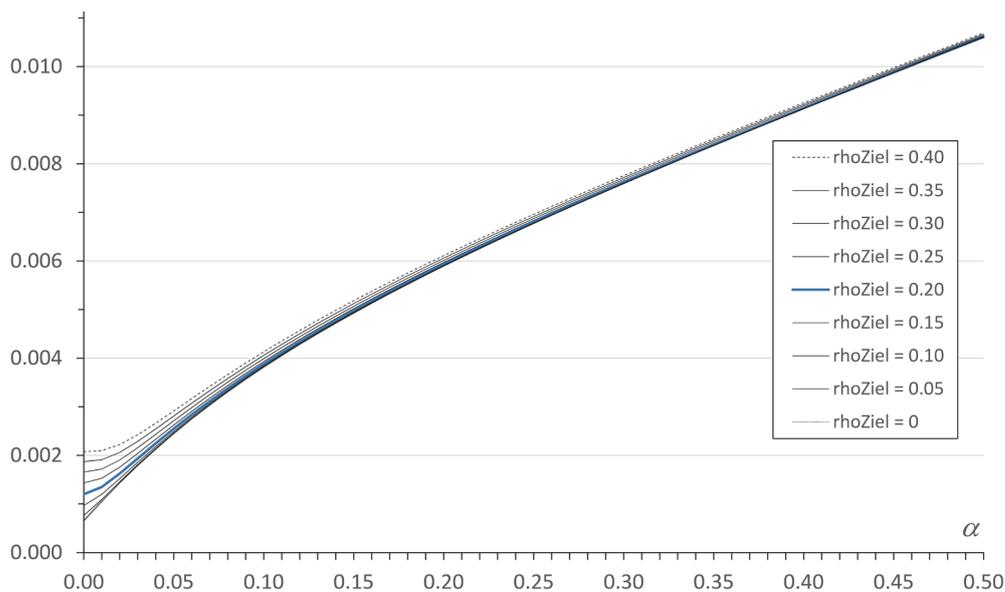


ABBILDUNG 15: Standardabweichung der Rentenanpassungen in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit α für verschiedene Reserveniveaus $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ bei trendabhängigen Überlebenswahrscheinlichkeiten (*Variante 1*). Berechnung erfolgte auf Grundlage von 10 000 Simulationsläufen.

4.4 Der allgemeine Fall

Wir berücksichtigen in diesem Abschnitt zusätzlich das Kapitalanlagerisiko. Wir unterstellen eine gleichbleibende Risikoexposition, d.h. $\sigma(t) = \sigma_{Ziel} > 0$ für alle t . Wir beschränken uns also auf eine *reine LM-Strategie*, wobei allerdings bei der Festlegung der Rentenanpassung zusätzlich das Kapitalmarktrisiko zu berücksichtigen ist. Es gilt $u(t+1) = (1-\alpha)u(t) + X_{t+1} - Y_{t+1}$ - vgl. (Gl. 31). Zu beachten ist, dass die stochastische Komponente X_{t+1} im Unterschied zu Y_{t+1} *nicht* unabhängig von der Festlegung der Rentenanpassungen ist, insbesondere ist somit X_{t+1} auch abhängig von ρ_{Ziel} .

4.4.1 Unterdeckungswahrscheinlichkeiten

Zunächst untersuchen wir die Unterdeckungswahrscheinlichkeiten, also die Wahrscheinlichkeit, dass während der Laufzeit der Wert der Kapitalanlagen geringer ist als die Summe der Deckungsrückstellungen. Aufgrund der Rentenanpassungsregel (Gl. 29) führt aber eine Unterdeckung zu einer Korrektur der Rentenanpassung, so dass es ggf. zu einer Rentenkürzung kommt. Die Unterdeckung führt also nicht zu einer *Insolvenz* im Sinne einer *Zahlungsunfähigkeit*, wenn nämlich die Summe der fälligen Renten das Vermögen übersteigt.²² Da eine vorübergehende geringfügige Unterdeckung durchaus akzeptabel sein kann, untersuchen wir auch die Wahrscheinlichkeit, dass zu einer 5%-igen oder 10%-igen Unterdeckung kommt.²³

Wir setzen $m_\delta(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) := \mathbf{P}(\text{Min}(\rho(t) : t \in \{0, \dots, T\}) < -\delta)$ und bestimmen für $\delta = 0$, $\delta = 5\%$ und $\delta = 10\%$ die Paare (α, ρ_{Ziel}) , für die gilt $m_\delta(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) = 1\%$. Im Standardfall unterstellen wir eine gleichbleibende Risikoexposition von $\sigma_{Ziel} = 0.05$ und setzen voraus, dass $\rho(0) = \rho_{Ziel}$ ist.

Für $\sigma_{Ziel} > 0$ ist der X_t -Prozess abhängig von der Wahl von α und ρ_{Ziel} . Wollte man also zu einem gegebenen α -Wert die Zielreservequote ρ_{Ziel} so bestimmen, dass

²² Von Extremfällen (stark negative Startreserve oder $\alpha = 0$ d.h. kein Rentenanpassung) abgesehen, beobachtet man bei den Simulationen keine Insolvenz.

²³ Vgl. hierzu § 115 Abs. 2a und 2b VAG.

$m_\delta(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) = 1\%$, so wäre hierzu eine ganze Serie von Simulationsläufen erforderlich, um ein passendes ρ_{Ziel} näherungsweise zu bestimmen. Der Zeitaufwand für diese große Anzahl von Simulationsläufe wäre allerdings prohibitiv hoch.

Wir können allerdings den Rechenaufwand erheblich reduzieren, wenn wir berücksichtigen, dass der Einfluss der Parameter α und ρ_{Ziel} auf den X_t -Prozess vergleichsweise schwach ist. Es gilt nämlich (vgl. Gl. 27):

$$X_{t+1} \approx (1 - \zeta_t) \sigma_{Ziel} w_{t+1}^\Delta = \sigma_{Ziel} w_{t+1}^\Delta - \nu_t \exp(\rho^{(e)}(t+1)) \sigma_{Ziel} w_{t+1}^\Delta,$$

wobei der Strukturparameter ν_t nur vom Sterblichkeitsverlauf abhängt. Die standardnormalverteilte Zufallsvariable w_{t+1}^Δ ist der stochastische Treiber der Kapitalmarktentwicklung im Zeitabschnitt $[t, t+1]$.

Da ν_t in der Variante 1 eine Größenordnung von rund 0.06-0.08 hat (vgl. Abb. 10), ist der Einfluss der Parameter α und $\rho^{(e)}(t+1) = \rho_{Ziel} + (1 - \alpha) u(t)$ auf den X_t -Prozess eher gering. Um dies zu verdeutlichen zeigen wir in der folgenden Tabelle 4 die Verteilungsparameter der X_t -Pfade für verschiedene (α, ρ_{Ziel}) -Kombinationen.

		Verteilungsparameter		
α	ρ_{Start}	Mittelwert	Standardabweichung	Schiefe
0.20	0.20	0.000109	0.046320	0.011220
0.25	0.20	0.000048	0.046305	0.011253
0.20	0.25	0.000100	0.046310	0.009380
0.15	0.20	0.000059	0.046320	0.008264
0.20	0.15	0.000113	0.046316	0.010061

Tabelle 4: Parameter der Verteilung der X_t -Pfade für Variante 1, $\sigma_{Ziel} = 0.05$ und verschiedene (α, ρ_{Ziel}) -Kombinationen. Ausgewertet wurden jeweils 50 000 Simulationsläufe.

Zur Bestimmung der Kombinationen (α, ρ_{Ziel}) , für die gilt $m_\delta(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) = 1\%$, simulieren wir die $u(t)$ -Pfade gemäß (Gl. 31) für $\alpha = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.5$ für jeweils den

gleichen Satz von (insg. 50 000) X_t - Pfaden. Hierzu generieren wir in einem ersten Berechnungsschritt die X_t - Pfaden für den Parametersatz $(\alpha, \rho_{Ziel}) = (0.2, 0.2)$.

Da die X_t - Pfade nahezu identisch für alle (α, ρ_{Ziel}) - Kombinationen sind, gilt

$$m_0(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) \approx m_\delta(\alpha, \rho_{Ziel} - \delta, \sigma_{Ziel}).$$

α	$\sigma_{Ziel} = 0.02$			$\sigma_{Ziel} = 0.05$			$\sigma_{Ziel} = 0.08$		
	0.5%	1%	5%	0.5%	1%	5%	0.5%	1%	5%
0	49.2%	44.7%	34.2%	104.0%	94.1%	70.8%	156.0%	143.0%	108.4%
0.05	24.6%	23.2%	19.2%	52.1%	48.9%	39.7%	79.6%	74.2%	61.3%
0.10	18.9%	17.8%	15.1%	39.7%	37.2%	31.1%	59.9%	56.5%	47.9%
0.15	16.0%	15.2%	13.0%	33.5%	31.7%	26.8%	50.6%	48.0%	41.2%
0.20	14.2%	13.5%	11.6%	29.7%	28.1%	24.0%	44.8%	42.8%	36.9%
0.25	13.1%	12.4%	10.7%	27.2%	25.6%	22.0%	41.1%	39.2%	33.9%
0.30	12.2%	11.6%	10.0%	25.2%	23.8%	20.6%	38.3%	36.7%	31.7%
0.35	11.5%	11.0%	9.5%	23.6%	22.4%	19.5%	36.2%	34.6%	29.9%
0.40	11.0%	10.5%	9.1%	22.6%	21.4%	18.6%	34.5%	32.9%	28.6%
0.45	10.6%	10.1%	8.7%	21.7%	20.5%	17.9%	33.2%	31.6%	27.5%
0.50	10.2%	9.7%	8.4%	20.9%	19.8%	17.3%	32.1%	30.6%	26.6%

Tabelle 5: Schätzung der erforderliche Reservequote $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit α , so dass $m_0(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) = 0.5\%$ bzw. 1% bzw. 5% für $\sigma_{Ziel} \in \{0.02, 0.05, 0.08\}$; es wurde das *Basisszenario* (*Variante1 / Szenario0*) zugrunde gelegt. Siehe auch Abbildung 16.

Die Tabelle 5 ist für den Fall $\sigma_{Ziel} = 0.05$ wie folgt zu lesen: Bei einer Anpassungsrate von $\alpha = 0.20$ und Zielreservequote von $\rho_{Ziel} = 29,7\% \approx 30\%$ ist die Wahrscheinlichkeit einer temporären Unterdeckung ($\rho(t) < 0$) kleiner als 0.5% .²⁴

Da $m_0(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) \approx m_\delta(\alpha, \rho_{Ziel} - \delta, \sigma_{Ziel})$ ist bei gleicher Anpassungsrate für eine Zielreservequote von $\rho_{Ziel} = 19,7\% \approx 20\%$ die Wahrscheinlichkeit einer temporären Unterdeckung von mehr als 10% ebenfalls kleiner als 0.5% .

In der Abbildung 16 sind die Berechnungsergebnisse grafisch aufbereitet. Für drei verschiedenen Aktienquoten 10% , 25% und 40% (entsprechend $\sigma_{Ziel} = 2\%$, 5% bzw. 8%)

²⁴ Einzelne Werte wurden mit den „richtigen“ X_t -Pfaden simuliert; dabei zeigen sich keine erkennbaren systematischen Unterschiede zu den hier dargestellten Schätzwerten.

wird der Zusammenhang zwischen Rentenanpassungsgeschwindigkeit und erforderlicher Zielreservequote dargestellt. Zunächst ist offensichtlich, dass eine höhere Aktienquote insgesamt ein größeres Reservepolster verlangt. Hat man sich auf eine strategische Aktienquote festgelegt (z.B. 25% bzw. $\sigma_{Ziel} = 5\%$, vgl. mittlere Grafik der Abb. 16), so gilt es eine Abwägung zwischen Rentensicherheit und Reservebedarf zu treffen. Je höher der Sicherheitsbedarf (niedriger α -Wert und geringe Unterdeckungswahrscheinlichkeit) desto höher ist der Reservebedarf. Toleriert man eine temporäre Unterdeckung von beispielsweise 10% (vgl. § 115 Abs. 2b VAG) so erfordert eine Aktienquote von 25% eine Zielreserve von rund 20%. Bei einer Anpassungsrate von $\alpha = 20\%$ würde eine Unterdeckung von 10% mit 0.5% Wahrscheinlichkeit eintreten. Wenn sie dann eingetreten ist (dann ist $u(t) = \rho(t) - \rho_{Ziel} = -0.3$), so ist wegen Gl. 31

$$u^{(e)}(t+1) = (1 - \alpha) u(t) = -0.24$$

; d.h. die *erwartete* Unterdeckung beträgt dann nur noch 4%. Nach einem weiteren Jahr mit rechnungsmäßigem Verlauf wäre dann die Reservequote wieder positiv, nämlich $\rho^{(e)}(t+2) = \rho_{Ziel} + 0.8^2(-0.3) = +0.8\%$.²⁵

²⁵ Vgl. hierzu die Regel, dass eine Unterdeckung bei einem Pensionsfonds nach 3 Jahren beseitigt sein soll - § 115 Abs. 2a Satz 3 Buchst a VAG.

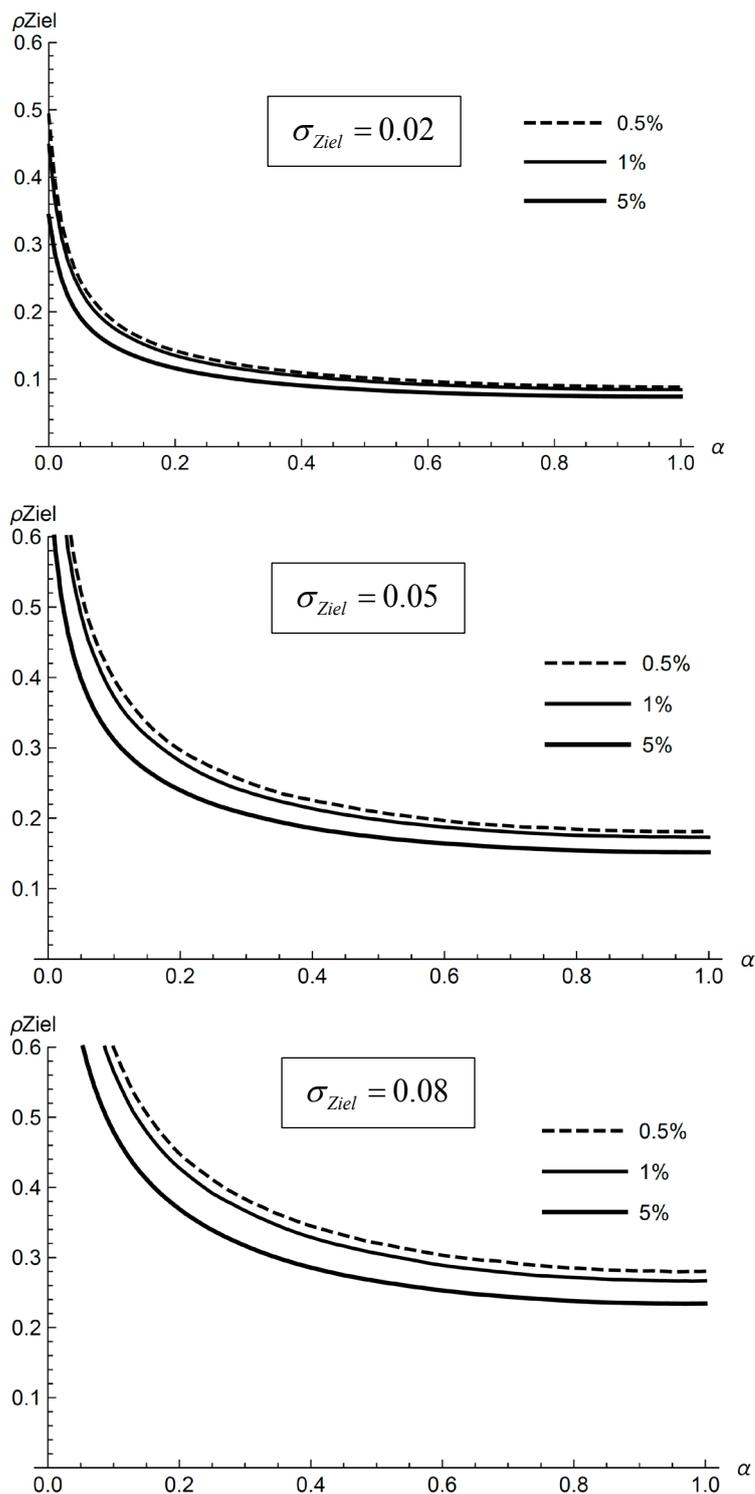


ABBILDUNG 16: Erforderliche Reservequote $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit α bei einem Sicherheitsniveau von 0.5%, 1% bzw. 5% für $\sigma_{Ziel} \in \{0.02, 0.05, 0.08\}$. Berechnung erfolgt auf Grundlage von jeweils 50 000 Simulationsläufen. Siehe auch Tabelle 6.

Die Berechnungen in Tabelle 6 zeigen, dass für $\sigma_{Ziel} = 0.05$ eine Zielreservequote $\rho_{Ziel} = 20\%$ mit einer Anpassungsgeschwindigkeit von $\alpha = 0.2$ zu akzeptablen Unterdeckungswahrscheinlichkeiten führt. Wir wählen daher für die folgenden Berechnungen als Standardbelegung der ALM-Parameter: $\rho_{Ziel} = 0.2$, $\alpha = 0.2$, $\sigma_{Ziel} = 0.05$.

$m_{\delta}(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) = \mathbf{P}(\text{Min}(\rho(t) : t \in \{0, \dots, T\}) < -\delta)$					
α	$\delta = 0$	$\delta = 5\%$	$\delta = 10\%$	$\delta = 15\%$	$\delta = 20\%$
$\rho_{Ziel} = 20\%$					
0.00	53.984%	45.456%	37.798%	30.858%	24.676%
0.05	50.918%	33.174%	19.144%	9.760%	4.378%
0.10	40.870%	18.492%	6.288%	1.646%	0.332%
0.15	28.372%	8.120%	1.552%	0.178%	0.008%
0.20	18.324%	3.362%	0.374%	0.018%	0.000%
0.25	10.994%	1.226%	0.068%	0.000%	0.000%
0.30	6.512%	0.514%	0.018%	0.002%	0.000%
0.35	4.064%	0.216%	0.008%	0.000%	0.000%
0.40	2.304%	0.068%	0.000%	0.000%	0.000%
0.45	1.398%	0.022%	0.000%	0.000%	0.000%
0.50	0.898%	0.024%	0.002%	0.000%	0.000%
$\rho_{Ziel} = 30\%$					
0.00	37.574%	30.688%	24.670%	19.346%	15.026%
0.05	19.128%	9.742%	4.330%	1.664%	0.592%
0.10	6.174%	1.676%	0.328%	0.048%	0.004%
0.15	1.580%	0.228%	0.022%	0.000%	0.000%
0.20	0.332%	0.026%	0.002%	0.000%	0.000%
0.25	0.070%	0.002%	0.000%	0.000%	0.000%
0.30	0.016%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
0.35	0.008%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
0.40	0.004%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
0.45	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
0.50	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%

Tabelle 6: Wahrscheinlichkeit einer Unterdeckung in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit α bei einer Zielreservequote von $\rho_{Ziel} = \rho(0) = 20\%$ bzw. 30%. Es wurde das *Basisszenario* zugrunde gelegt, Berechnungen basieren auf 50 000 Simulationsläufen - 0.002% entspricht also 1 Beobachtung.

4.4.2 Rendite-Risiko Profile

Wir versetzen uns in die Lage einer Person, die gerade das Rentenalter erreicht hat und über einen Kapitalstock zur Finanzierung einer Leibrente verfügt. Bei der Wahl des Rentensystems wird diese Person eine Abwägung zwischen der Höhe der zur *erwartenden* Rentenzahlungen und der damit verbundenen Risiken treffen müssen. Wir wollen unterstellen, dass der angehende Pensionär (oder Pensionärin) in jedem Falle eine Leibrentenanwartschaft erwerben möchte und somit eine streng individuelle Kapitalanlage nicht in Betracht kommt. Wir beschränken uns daher auf zwei mögliche Rentensysteme, nämlich die *aktuarielle Tontine* einerseits und das oben vorgestellten kollektive Rentensystem (selbstfinanzierender Pensionsfonds). Bei der *aktuariellen Tontine* (siehe Anhang 5.4) kommt es zum Risikoausgleich innerhalb des Kollektivs gleichaltriger Rentner, jedoch nicht zu einem Risikoausgleich zwischen Rentengenerationen. Beide hier betrachteten Rentensysteme bieten allerdings eine lebenslängliche Rentenzahlung, so dass das individuelle Langleblichkeitsrisiko, nämlich das Risiko den Zeitpunkt des Kapitalverzehr zu überleben, ausgeschaltet ist.

Für beide Systeme können wir für eine gegebene Rentnergeneration die *erwartete Generationenrendite* ermitteln. Die *erwartete* Generationenrendite hängt wesentlich von der Risikoexposition der Kapitalanlagen ab. Bei einer sicheren Kapitalanlage ($\sigma = 0$) wird die Generationenrendite nur vom Verlauf der stochastischen Sterblichkeitsentwicklung beeinflusst. Mit zunehmender Risikoexposition am Kapitalmarkt steigt die erwartete Verzinsung der zugrunde liegenden Kapitalanlagen und somit auch die erwartete Generationenrendite. Es liegt also nahe, die *Standardabweichung der Generationenrendite* als Maßzahl für das Risiko des Leibrentenkontraktes zu wählen. Als weitere Risikokennzahl betrachten wir die *Volatilität der Rentenanpassungen*, also die Standardabweichung der laufenden Rentenanpassungen während der Rentenlaufzeit.

Bei der Berechnung der *Rendite-Risiko Profile* treffen wir folgende Annahmen:

- Wir legen das *Basisszenario* (Szenario 0/ Variant 1 – vgl. Abschnitt 4.1) zugrunde und simulieren den Anfangsbestand XL (vgl. Abb. 6) für eine Laufzeit von $T=60$ Jahren. Hierbei legen wir die Kalibrierung der Tabelle 1 für einen gemischten (hybriden) Bestand mit $\sigma_\alpha = 0.04$ zugrunde.
- Wir analysieren die Rentnergeneration $G = G(t_0)$, die zum Zeitpunkt $t_0 = 10$ im Alter $z = 65$ in das Rentensystem (Pensionsfonds bzw. aktuarielle Tontine) eintritt. Diese Rentnergeneration hat dann zum Zeitpunkt $T = 60$ das Schlussalter $\omega = 115$

erreicht. Bezogen auf die Kalibrierung entspricht die betrachtete Rentnergeneration dem Geburtsjahrgang 1950, die im Jahre 2015 das Renteneintrittsalter 65 erreicht.

- Der Anfangsbestand der Rentnergeneration G umfasst $L_0^G = 100000$ Personen. Mit L_k^G bezeichnen wir die Anzahl der Überlebenden nach $k = 0, 1, \dots, \omega - z = 50$ Jahren.
- Beim Eintritt in den Pensionsfonds zahlt die Rentnergeneration einen Einmalbeitrag von $f L_0^G a(z, t_0, t_0 - 1) r(t_0)$ mit $f = \exp(\rho_{Ziel})$. Mit Renteneintritt erhält jeder Rentner eine Rente in Höhe von $r(t_0)$, die in den Folgejahren entsprechend der Sterblichkeits- und der Kapitalmarktentwicklung angepasst wird. Man beachte, dass sowohl der Rentenbarwert $a(z, t_0, t_0 - 1)$ als auch die Rentenhöhe bereits zum Zeitpunkt $t_0 - 1$ feststehen.
- Beim Eintritt in das Tontinenmodell zahlt die Rentnergeneration ebenfalls einen Einmalbeitrag in Höhe von $f L_0^G a(z, t_0, t_0 - 1) r(t_0)$; dieser Betrag entspricht zugleich dem Startkapital $P_0^{(Tont)}$ der aktuariellen Tontine. Die erste Rente im Tontinenmodell $\hat{r}(t_0)$ und auch die folgenden Renten werden dabei so festgesetzt, dass der Barwert der Renten jeweils dem vorhandenen Tontinenkapital entspricht.
- Um eine Vergleichbarkeit mit dem kollektiven Rentenfonds zu ermöglichen, wird bei der Berechnung des Rentenbarwertes für die Tontine eine feste Rentendynamik $\hat{\varepsilon}$ einkalkuliert. $\hat{\varepsilon}$ wird dabei so festgelegt, dass

$$f \sum_{k=0}^{\omega-z} p_z(t_0, 0) \exp(-k\mu) = \sum_{k=0}^{\omega-z} p_z(t_0, 0) \exp(-k(\mu - \hat{\varepsilon})).$$

$\hat{\varepsilon}$ gleicht also den Zuschlag von f aus. Für $f = \exp(0.2)$ ergibt sich bei der gegebenen Kalibrierung beispielsweise $\hat{\varepsilon} = 1.7561\%$.

Zu beachten ist, dass im Tontinenmodell die Renten jährlich auf der Grundlagen der *aktuellen* Beobachtungen der Sterblichkeit und des Kapitalmarktes neu festgelegt werden. Im kollektiven Modell des Pensionsfonds erfolgen hingegen die Anpassungen an die Sterblichkeits- und Kapitalmarktentwicklung jeweils um 1 Jahr verzögert.

- Wir setzen $\rho_{Ziel} = 20\%$ und $\alpha = 0.2$ bzw. $\alpha = 0.15$. Für $0 \leq \sigma_{Ziel} \leq 0.2$ berechnen wir für jeweils 50 000 Simulationspfade die Generationenrenditen im Pensionsfonds und im Tontinenmodell.

Zunächst betrachten wir die Generationenrendite in Abhängigkeit von der Risikoexposition (Abbildung 17).

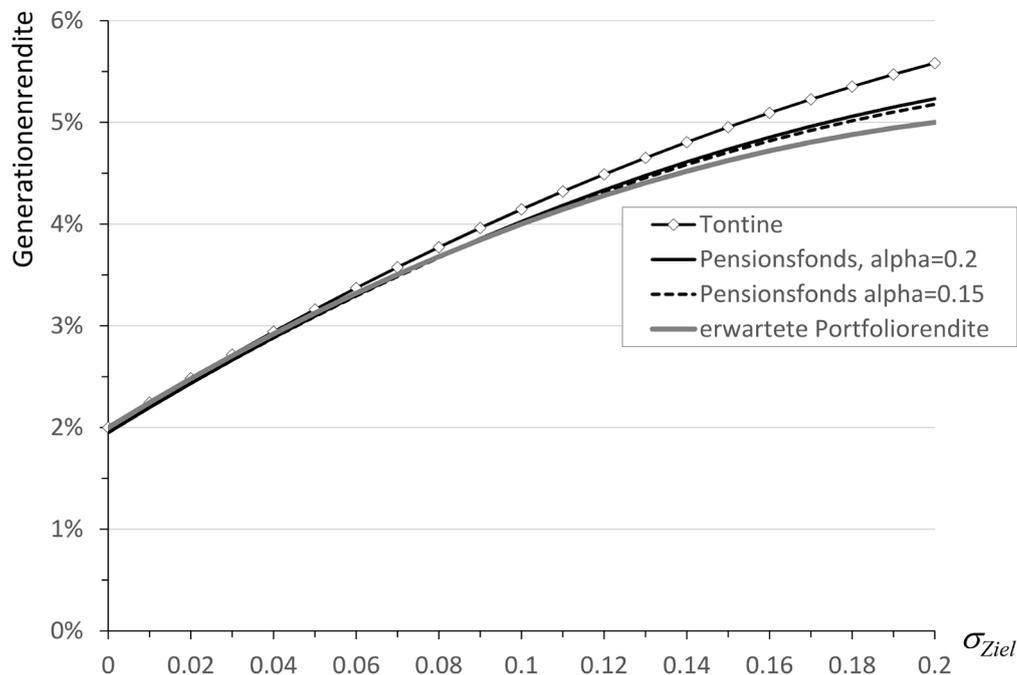


ABBILDUNG 17: Vergleich der mittleren Generationenrenditen für das Tontinemodell und den Pensionsfonds in Abhängigkeit von der Risikoexposition. Für den Pensionsfonds wurde $\rho_{Ziel} = 0.2$ und $\alpha = 0.20$ bzw. $\alpha = 0.15$ unterstellt.

Es fällt auf, dass die Generationenrendite stets größer als die erwartete Portfoliorendite, nämlich $\mu(\sigma_{Ziel}) = \bar{\mu} + r_M \sigma_{Ziel} - \frac{1}{2} \sigma_{Ziel}^2$ ist. Diese auf den ersten Blick widersprüchliche Beobachtung erklärt sich aus der Definition der Generationenrendite als innerer Zins und dem zugrunde gelegten Black-Scholes-Modell – vgl. hierzu die Ausführungen im Anhang 5.4. Aus dem gleichen Grunde ist auch in Abb. 17 die Generationenrendite im Tontinenmodell systematisch höher (wenn auch nur minimal) als im Pensionsfonds. Wie im Anhang 5.4 erläutert wird, ist Generationenrendite umso größer je volatiler der Pfad der Rentenanpassungen ist. Dies erklärt auch, warum die Generationenrendite bei einer Anpassungsrate von $\alpha = 0.2$ geringfügig größer ist als für $\alpha = 0.15$. Der Unterschied ist jedoch marginal.

Abbildung 18 zeigt die Volatilität der Rentenanpassung in den verschiedenen Modellen. Bei einer sicheren Kapitalanlage ($\sigma_{Ziel} = 0$) bleibt bei allen Modellen eine Restvolatilität aufgrund der Stochastizität der Sterblichkeitsentwicklung. Diese ist jedoch beim Pensionsfonds mit 0.516% ($\alpha=0.15$) 0.586% ($\alpha=0.2$) deutlich niedriger als beim Tontinenmodell (2.746%). Mit wachender Risikoexposition der Kapitalanlagen wächst auch

der Anpassungsdruck auf die Renten. Man sieht sehr deutlich, dass es im Tontinenmodell zu keiner Minderung des Kapitalmarktrisikos kommt, denn die Volatilität der Rentenanpassung entspricht nahezu der Volatilität der zugrunde gelegten Kapitalanlagen.

Beim Pensionsfonds ist aber der Glättungseffekt des Kapitalanlagenrisikos deutlich zu erkennen. Die Schwankungen am Kapitalmarkt werden weitgehend von der kollektiven Reserve absorbiert. Der Glättungseffekt ist bei einer Anpassungsrate von $\alpha = 0.15$ erwartungsgemäß niedriger als für $\alpha = 0.20$.

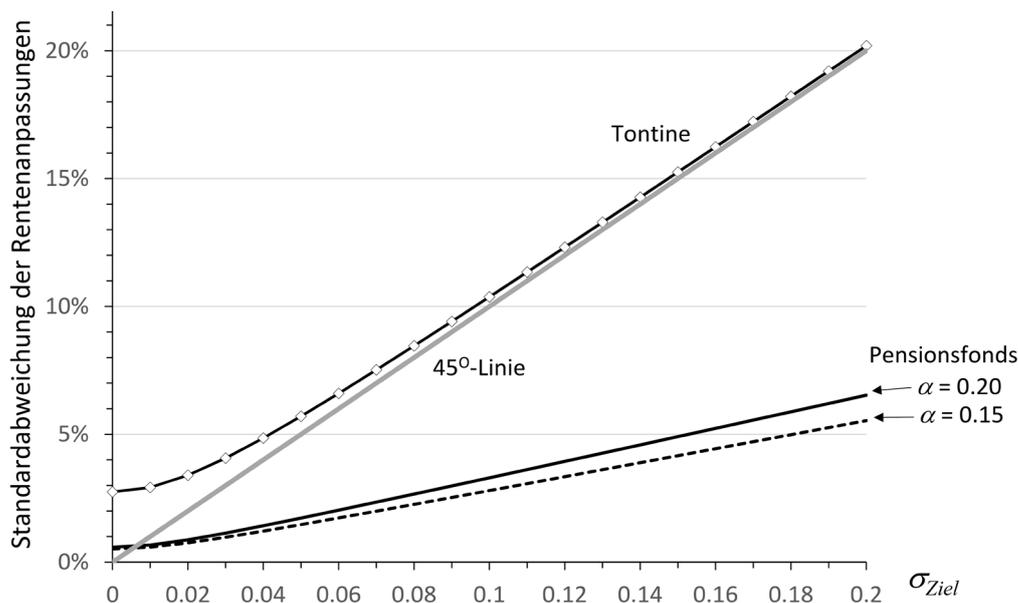


ABBILDUNG 18: Vergleich der Volatilität der Rentenanpassungen für das Tontinenmodell und dem Pensionsfonds in Abhängigkeit von der Risikoexposition. Für den Rentenfonds wurde $\rho_{Ziel} = 0.2$ und $\alpha = 0.20$ bzw. $\alpha = 0.15$ unterstellt.

Neben der Volatilität der Rentenanpassungen wollen wir noch eine weitere Risikokennzahl untersuchen, nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass es zu Rentenkürzungen kommt. Wir untersuchen die Wahrscheinlichkeit einer Rentenkürzung bzw. von Rentenkürzungen um mehr als 2% bzw. mehr als 4% - vgl. Abbildung 19. Selbst bei einer geringen Risikoexposition ist die Gefahr einer deutlichen Rentenkürzung beim Tontinenmodell sehr hoch. Bei einer Aktienquote von 100% (entspricht $\sigma_{Ziel} = 0.2$) ist im kollektiven Rentenmodell die Wahrscheinlichkeit einer Rentenkürzung rund 23.6% und entspricht daher in etwa der Wahrscheinlichkeit einer Rentenkürzung im Tontinenmodell bei sicherer Kapitalanlage. Beurteilt man also die Sicherheit einer Rente ausschließlich nach

der Wahrscheinlichkeit einer Rentenkürzung, so könnte ein Pensionsfonds mit 100% Aktienquote die gleiche Sicherheit bieten wie eine actuarielle Tontine.

Es fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeit einer Rentenkürzung bei der Tontine für die sichere Anlage etwas höher ist als für eine Anlage mit einer geringen Risikoexposition. Dies erklärt sich aus dem Umstand, dass für geringe Werte von σ_{Ziel} der Diversifikationseffekt überwiegt, dass also ein Teil des Schankungen der Rentenanpassungen aufgrund der Sterblichkeitsänderungen durch die Kapitalmarktschwankungen absorbiert wird.

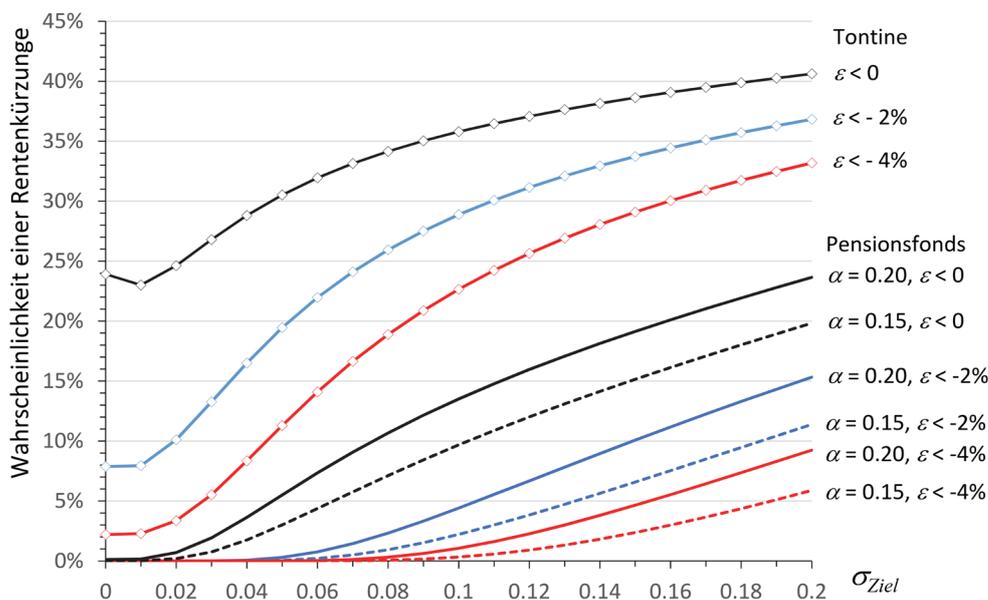


ABBILDUNG 19: Wahrscheinlichkeit einer Rentenkürzung, einer Rentenkürzung um mehr als 2% bzw. um mehr als 4% in Abhängigkeit von der Risikoexposition. Für den Pensionsfonds wurde $\rho_{Ziel} = 0.2$ und $\alpha = 0.20$ bzw. $\alpha = 0.15$ unterstellt.

Wir bestimmen nun die *Rendite Risiko-Profile* für den Pensionsfonds und das Tontinenmodell. Als Renditekennzahl verwenden wir den Mittelwert über die beobachteten Generationenrenditen. Als Risikokennzahl wählen wir zum einen die Standardabweichung der beobachteten Generationenrenditen (Abb. 20) und zum anderen die mittlere Volatilität der Rentenanpassungen (Abb. 21). Hierbei wurden jeweils 50 000 Simulationspfade ausgewertet.

Die Rendite-Risiko-Profile 1 in Abbildung 20 zeigen keinen substantiellen Unterschied zwischen den verschiedenen Modellen. Dies liegt daran, dass die Generationenrenditen

als *gewichtete* Durchschnittswerte über die gesamte Rentenlaufzeit von $\omega - z = 50$ Jahren berechnet werden. Bei einer Risikoexposition von $\sigma_{Ziel} = 0.2$ beträgt im Tontinenmodell Standardabweichung der Generationenrendite rund 4.5%; dies entspricht einer mittleren Rentenlaufzeit von $(0.2 / 0.045)^2 \approx 19.75$, was in etwa der ferneren Lebenserwartung eines gemischten Bestandes des Jahrgangs 1950 entspricht. Der kollektive Risikoausgleich im Pensionsfonds bewirkt kaum eine zusätzliche Glättung der Generationenrendite, da der kollektive Risikoausgleich im Rentenfonds sich im Wesentlichen auf benachbarte Generationen erstreckt.

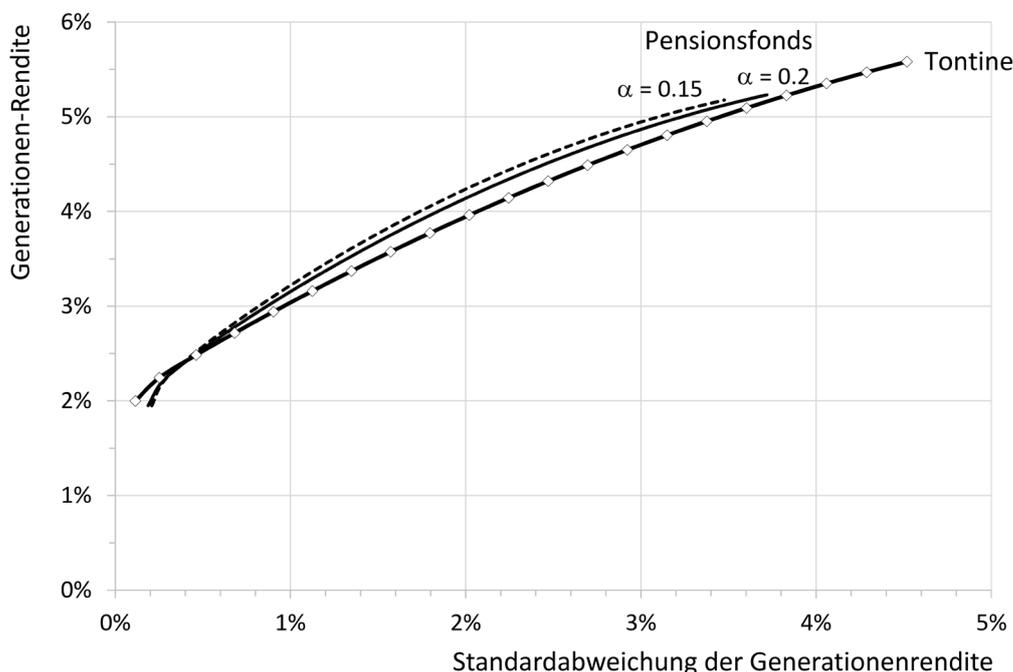


ABBILDUNG 20: **Rendite-Risiko Profile 1.** Durchschnittliche Generationenrendite in Relation zur Standardabweichung der Generationenrendite.

Aus Sicht des Rentenempfängers ist jedoch die Stabilität der Rente das wichtigere Merkmal eines guten Rentensystems. Die Volatilität der Rentenanpassungen (gemessen als Standardabweichung der Rentenanpassungen) ist also eine adäquate Risikokennzahl für ein Rentensystem. Die so berechneten Rendite Risiko-Profile 2 in Abbildung 21 zeigen deutlich die Überlegenheit des selbstfinanzierenden Pensionsfonds gegenüber dem Tontinenmodell. Bei einem Risikoniveau von 5% beträgt die erwartete Generationenrendite bei der Tontine rund 3%, beim Pensionsfonds sind es rund 5%. Bei einer Rentenlaufzeit von 20 Jahren entspricht dieser Renditeunterschied einer Rentenerhöhung um

rund 18%.²⁶ Aufgrund der stochastischen Sterblichkeitsentwicklung sind auch bei einer sicheren Kapitalanlage die Rentenanpassungen volatil.

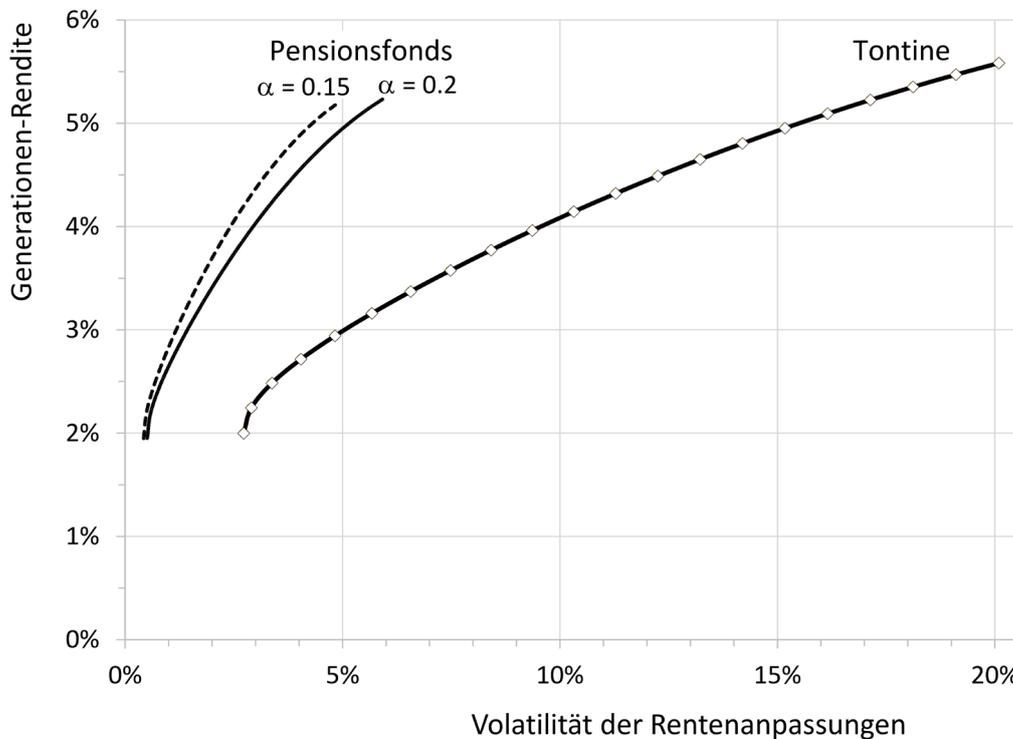


ABBILDUNG 21: **Rendite-Risiko Profile 2.** Durchschnittliche Generationenrendite in Relation zur Volatilität der Rentenanpassungen.

²⁶ Bei der Vergleichsrechnung ist zu beachten ist, dass genannten Renditen von 3% bzw. 5% als Zinsintensitäten zu interpretieren sind.

5 Anhang

5.1 Das Problem der doppelten Stochastizität

Wir untersuchen die Entwicklung eines Rentnerbestandes, wobei wir einen Anfangsbestand und eine Folge von Zugängen (Neurentner) als gegeben (d.h. deterministisch) voraussetzen. Das stochastische Modell in (Gl. 12 und 13) liefert uns ein Modell für die Sterblichkeitsentwicklung einer Gesamtpopulation von Rentnern. Betrachtet man einen hinlänglich großen Bestand, so ist die künftige Bestandsentwicklung ein von (W'_t) getriebener stochastischer Prozess. Für einen kleinen Bestand wird die zukünftige Bestandsentwicklung zusätzlich durch die individuellen Überlebenswahrscheinlichkeiten bestimmt. Es überlagern sich dann *zwei* stochastische Einflussfaktoren, der der *kollektiven* und der der *individuellen* Sterblichkeit.

Die kollektive und die individuelle Sterblichkeit sind jedoch nicht voneinander unabhängig. Betrachten wir beispielsweise zwei x -jährige Personen, die zum Zeitpunkt t leben, so sind die Ereignisse A_1 : „Person 1 überlebt das nächste Jahr“ und A_2 : „Person 2 überlebt das nächste Jahr“ bestimmt nicht stochastisch unabhängig, denn beide Ereignisse sind verbunden durch die zufällige 1-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit $\tilde{p}(x, t) = 1 - \tilde{q}(x, t)$. Man wird jedoch die Ereignisse A_1 und A_2 als stochastisch unabhängig annehmen können, sofern die 1-jährige Überlebenswahrscheinlichkeiten als bekannt vorausgesetzt wird. Die Annahme, dass die individuellen Lebensläufe der Personen des Bestandes *unabhängig* voneinander sind, ist also nur sinnvoll im Sinne einer *bedingten stochastischen Unabhängigkeit*.²⁷

Die folgende Proposition stellt eine Verbindung zwischen den beiden Stufen der Stochastik her.

Proposition 3

Sei \tilde{p} eine Zufallsvariable mit Werten im Intervall $[0, 1]$. Für jedes $p \in [0, 1]$ seien $X_1(p), X_2(p), \dots, X_N(p)$ stochastisch unabhängige $B(1, p)$ verteilte Zufallsvariablen

und $U := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n X_k(\tilde{p})$, dann gilt:

²⁷ Auf eine stringente Formalisierung der bedingten stochastischen Unabhängigkeit wird hier verzichtet; der interessierte Leser sei auf [Schrager 2006] und auf [Jamshidian 2004] verwiesen.

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(\tilde{p}) \text{ und } \text{Var}(U) = \text{Var}(\tilde{p}) + \frac{1}{N} \mathbf{E}(\tilde{p} - \tilde{p}^2) \leq \text{Var}(\tilde{p}) + \frac{1}{4N}.$$

Beweis:

$$\mathbf{E}(U) = \int_0^1 \mathbf{E}(U | \tilde{p} = p) d\tilde{p}(p) = \int_0^1 p d\tilde{p}(p) = \mathbf{E}(\tilde{p}).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(U^2) &= \int_0^1 \mathbf{E}(U^2 | \tilde{p} = p) d\tilde{p}(p) = \int_0^1 \mathbf{E} \left(\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(p) \right)^2 \right) d\tilde{p}(p) \\ &= \int_0^1 \left(\left(1 - \frac{1}{N} \right) p^2 + \frac{p}{N} \right) d\tilde{p}(p) = \left(1 - \frac{1}{N} \right) \mathbf{E}(\tilde{p}^2) + \frac{1}{N} \mathbf{E}(\tilde{p}). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\text{Var}(U) = \left(1 - \frac{1}{N} \right) \mathbf{E}(\tilde{p}^2) + \frac{1}{N} \mathbf{E}(\tilde{p}) - (\mathbf{E}(\tilde{p}))^2 = \text{Var}(\tilde{p}) + \frac{\mathbf{E}(\tilde{p} - \tilde{p}^2)}{N}.$$

Da $0 \leq p - p^2 \leq \frac{1}{4}$ für alle $p \in [0, 1]$ erhält man: $\text{Var}(U) \leq \text{Var}(\tilde{p}) + \frac{1}{4N}$.

□

Wir können diese Proposition nutzen, um eine entsprechende Aussage für einen Personenbestand herzuleiten. Hierzu betrachten wir einen Rentenbestand $(L_x)_{x \geq z}$ von L_x Per-

sonen des Alters $x \in \{z, z+1, z+2, \dots\}$. Wir setzen $L := \sum_{x \geq z} L_x$, $l_x := \frac{L_x}{L}$. Für alle

$x \in \{z, z+1, z+2, \dots\}$ und alle $p \in [0, 1]$ seien $\{I_{x,1}(p), I_{x,2}(p), \dots, I_{x,L_x}(p)\}$ $B(1, p)$ -verteilte Zufallsvariablen, von denen wir annehmen wollen, dass für jedes $p \in [0, 1]$ sämtliche $\{I_{x,k}(p) : x \geq z, 1 \leq k \leq L_x\}$ stochastisch unabhängig sind.

Wir setzen $U_x(p) := \frac{1}{L_x} \sum_{k=1}^{L_x} I_{x,k}(p)$; dies ist Überlebenswahrscheinlichkeit der x -Kohorte

als Zufallsvariable parametrisiert mit p . Schließlich seien für $x \in \{z, z+1, z+2, \dots\}$ \tilde{p}_x Zufallsvariablen mit Werten in $[0, 1]$.

Als direkte Anwendung von Proposition 3 erhalten wir

Proposition 4

Für die *tatsächliche Bestandsüberlebenswahrscheinlichkeit* $U := \sum_{x \geq z} l_x U_x(\tilde{p}_x)$ gilt:

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}\left(\sum_{x \geq z} l_x \tilde{p}_x\right)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}(U) &= \sum_{x \geq z} l_x^2 \text{Var}(\tilde{p}_x) + \sum_{\substack{(x, x') \\ x, x' \geq z}} l_x l_{x'} \text{Cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_{x'}) + \frac{1}{L} \sum_{x \geq z} l_x \mathbf{E}(\tilde{p}_x - \tilde{p}_x^2) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{x \geq z} l_x \tilde{p}_x\right) + \frac{1}{L} \sum_{x \geq z} l_x \mathbf{E}(\tilde{p}_x - \tilde{p}_x^2) \leq \text{Var}\left(\sum_{x \geq z} l_x \tilde{p}_x\right) + \frac{1}{4L} \end{aligned}$$

□

Bemerkungen:

1. Die Zufallsvariable $\sum_{x \geq z} l_x \tilde{p}_x$ beschreibt die Überlebenswahrscheinlichkeit (als Zufallsvariable) eines (unendlich) großen Personenbestandes mit der Altersstruktur $(l_x)_{x \geq z}$. Wir können $\text{Var}\left(\sum_{x \geq z} l_x \tilde{p}_x\right)$ als Maß für die Unsicherheit der (kollektiven) Sterblichkeitsentwicklung interpretieren. Die Unsicherheit eines konkreten (kleinen) Personenbestandes mit der gleichen Altersstruktur erwächst zusätzlich aus der Unsicherheit der individuellen Lebensläufe der Personen. Diese zweite Komponente der Unsicherheit trägt mit dem Betrag $\frac{1}{L} \sum_{x \geq z} l_x \mathbf{E}(\tilde{p}_x - \tilde{p}_x^2)$ zur Gesamtvarianz bei.
2. Für $\sigma_\alpha \rightarrow 0$ ist $\tilde{p}_x = p_x$ deterministisch und $\text{Var}(U) = \frac{1}{L} \sum_{x \geq z} l_x (p_x - p_x^2)$.

Wir wollen die Proposition 4 nutzen, um im *CBD-Modell* (Abschnitt 2.4.) den Einfluss der Bestandsgröße auf die Volatilität der Sterblichkeitsentwicklung abzuschätzen.

Hierzu betrachten wir zum Zeitpunkt t den Rentenbestand $(L_t(z), L_t(z+1), \dots, L_t(\omega))$

und setzen wie oben $L(t) = \sum_{x=z}^{\omega} L_x(t)$. Vom Zeitpunkt t aus betrachtet ist die Gesamtzahl

der Überlebenden zum Zeitpunkt $t+1$ eine Zufallsgröße, die von der kollektiven (systematischen) Sterblichkeitsentwicklung und von der individuellen (idiosykratischen) Sterblichkeit der einzelnen Rentner abhängt.

Beobachten wir zum Zeitpunkt t die Realisierung $W'_t = w'_t$ und setzen $Z := W'_{t+1} - W'_t$, so können wir schreiben $\tilde{p}(x,t) = \left(1 + \exp(\sigma_\alpha Z) \exp(w'_t) g(x,t)\right)^{-1}$, wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Mit den obigen Bezeichnungen können wir die (zufällige) 1-jährigen Bestandsüberlebenswahrscheinlichkeit darstellen als

$$U = \sum_{x \geq z} l_x U_x(\tilde{p}(x,t)).$$

Setzen wir $f_x(z) = \left(1 + \exp(\sigma_\alpha z) \exp(w'_t) g(x,t)\right)^{-1}$ und $p_x = f_x(0)$, so gilt

$$f_x(z) \approx f_x(0) + z \frac{df_x}{dz}(0) = p_x - \sigma_\alpha z p_x (1 - p_x).$$

Wir approximieren die Zufallsvariable $\tilde{p}(x,t) = \left(1 + \exp(\sigma_\alpha Z) \exp(w'_t) g(x,t)\right)^{-1}$ durch die normalverteilte Zufallsvariable $\tilde{p}_x := p_x - \sigma_\alpha Z p_x (1 - p_x)$. Dies ergibt dann folgende approximative Darstellung der 1-jährigen Bestandsüberlebenswahrscheinlichkeit:

$$U_{prox} := \sum_{x \geq z} l_x U_x(\tilde{p}_x).$$

Setzen wir abkürzend $g_1 := \sum_{x \geq z} l_x p_x (1 - p_x)$ und $g_2 := \sum_{x \geq z} l_x p_x^2 (1 - p_x)^2$, so erhalten wir

mittels Proposition 4 $\mathbf{E}(U) \approx \mathbf{E}(U_{prox}) = \sum_{x \geq z} l_x p_x$ und

$$\begin{aligned} \text{Var}(U) &\approx \text{Var}(U_{prox}) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{x \geq z} l_x \tilde{p}_x\right) + \frac{1}{L_t} \sum_{x \geq z} l_x \mathbf{E}(\tilde{p}_x - \tilde{p}_x^2) = \frac{g_1}{L(t)} + \sigma_\alpha^2 \left(g_1^2 - \frac{g_2}{L(t)}\right) \end{aligned} \quad (\text{Gl. 35})$$

(Gl. 35) stellt einen einfachen Zusammenhang zwischen dem *systematischen Risiko* σ_α und der Bestandsgröße $L(t)$ bzw. den Bestandsstrukturparametern g_1 und g_2 her. Für einen großen Bestand ($L(t) \rightarrow \infty$) ergibt sich

$$\text{Var}(U) \approx \text{Var}(U_{prox}) = \sigma_\alpha^2 g_1^2.$$

Um die Güte der Approximation zu illustrieren, simulieren wir die „wahre“ Überlebenswahrscheinlichkeit U für verschiedene Niveaus von σ_α und verschiedenen Bestandsgrößen und vergleichen die Ergebnisse mit den Näherungswerten gemäß (Gl. 35).

Ausgangspunkt ist der Musterbestand (*BestandXL* – vgl. Abschnitt 2.4.4). Aufgrund der Größe des Bestandes (Gesamtzahl der Rentner: 1 852 681) ist das individuelle Sterblichkeitsrisiko zu vernachlässigen. Für diesen Bestand ergibt sich $g_1 = 0.04805526$ und $g_2 = 0.004067667$.

Um zu berechnen, welchen Einfluss die Bestandsgröße auf das Gesamtrisiko hat, leiten wir unter Beibehaltung der Altersverteilung (jedoch unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeitsbedingung) aus dem *BestandXL* kleine Bestände mit insgesamt 2^k (für $k = 7, \dots, 20$) Personen ab. Der kleinste betrachtete Bestand umfasst also nur insgesamt $2^7=128$ Personen, der größte 1 048 576 Personen. Für $\sigma_\alpha = 0$, $\sigma_\alpha = 4\%$ und $\sigma_\alpha = 8\%$ haben wir die Standardabweichung der Zufallsvariable U (angenähert durch 10 000 Monte Carlo Simulationen) mit der Standardabweichung der approximierenden Zufallsvariablen U_{prox} gemäß (Gl. 35) verglichen – siehe Abbildung 22. Dabei zeigt sich, dass der Unterschied zwischen Simulationsrechnungen und Näherungsformel so gering ist, dass er in der grafischen Darstellung kaum zu erkennen ist.

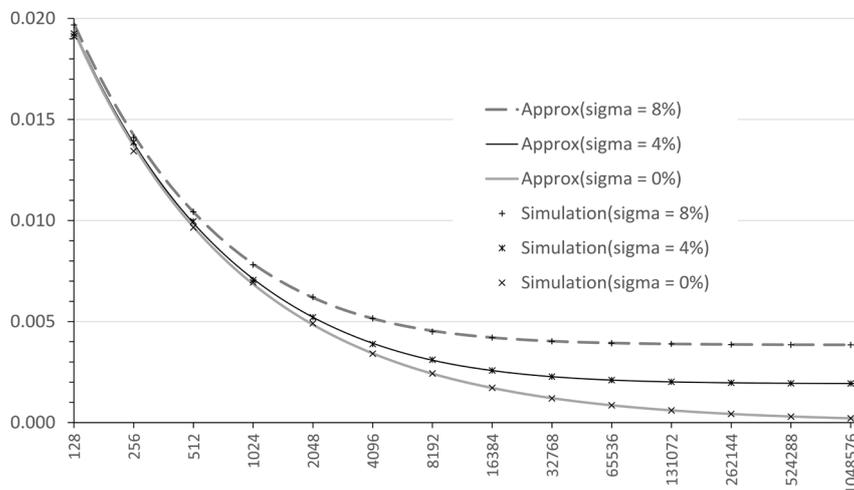


ABBILDUNG 22: Standardabweichung der 1-jährigen Bestandsüberlebenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Bestandsgröße für $\sigma_\alpha = 0$, $\sigma_\alpha = 4\%$, $\sigma_\alpha = 8\%$: Vergleich der Approximation nach (Gl. 35) und der Monte Carlo Simulation.

Bestandsgröße	Standardabweichung der 1-jährigen Bestandsüberlebenswahrscheinlichkeit					
	$\sigma_\alpha = 0$		$\sigma_\alpha = 4\%$		$\sigma_\alpha = 8\%$	
	Simulation	Approximation	Simulation	Approximation	Simulation	Approximation
128	1.9119%	1.9376%	1.9252%	1.9470%	1.9678%	1.9749%
256	1.3437%	1.3701%	1.3874%	1.3834%	1.4107%	1.4227%
512	0.9657%	0.9688%	0.9962%	0.9876%	1.0432%	1.0420%
1024	0.6941%	0.6850%	0.7056%	0.7115%	0.7811%	0.7854%
2048	0.4912%	0.4844%	0.5211%	0.5211%	0.6214%	0.6183%
4096	0.3409%	0.3425%	0.3885%	0.3928%	0.5157%	0.5148%
8192	0.2432%	0.2422%	0.3112%	0.3092%	0.4498%	0.4543%
16384	0.1724%	0.1713%	0.2577%	0.2574%	0.4205%	0.4208%
32768	0.1199%	0.1211%	0.2273%	0.2272%	0.4020%	0.4031%
65536	0.0857%	0.0856%	0.2101%	0.2104%	0.3926%	0.3939%
131072	0.0605%	0.0606%	0.2016%	0.2015%	0.3892%	0.3892%
262144	0.0430%	0.0428%	0.1970%	0.1969%	0.3861%	0.3868%
524288	0.0298%	0.0303%	0.1945%	0.1946%	0.3849%	0.3856%
1048576	0.0214%	0.0214%	0.1936%	0.1934%	0.3846%	0.3850%

Tabelle 7: Standardabweichung der 1-jährigen Bestandsüberlebenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Bestandgröße für $\sigma_\alpha = 0, 4\%$ und 8% : Vergleich der Approximation nach (Gl. 35) und Schätzungen von Monte Carlo Simulationen.

Die Ergebnisse der Proposition 4 und die obigen Modellrechnungen zeigen, dass in unserem Modell das idiosykratische Risiko nicht gesondert untersucht werden muss. Vielmehr können wir bei kleinen Beständen dieses Risiko durch eine entsprechende Anpassung des Risikoparameters σ_α ausgleichen. Hierzu bestimmen wir für den zu untersuchenden (kleinen) Bestand die Gesamtzahl L sowie die Strukturparameter g_1 und g_2 und berechnen den risikoadjustierte Parameter $\hat{\sigma}_\alpha$ gemäß

$$\hat{\sigma}_\alpha := \sqrt{\frac{1}{g_1 L} + \sigma_\alpha^2 \left(1 - \frac{g_2}{g_1^2 L}\right)} \approx \sqrt{\frac{1}{g_1 L} + \sigma_\alpha^2}. \quad (\text{Gl. 36})$$

5.2 Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung in *CBD-Modell*

Wenn die tatsächliche Sterbewahrscheinlichkeiten dem *CBD-Modell* nach (Gl. 9) und (Gl. 10) folgen bzw. durch diese Gleichungen gut angenähert werden können, so kann man sehr einfach auch Rechnungsgrundlagen mit Sicherheitszuschlägen ableiten. Betrachten wir den Ansatz $\text{logit}(q(x,t)) = \alpha_0 + \alpha_1 t + (\beta_0 + \beta_1 t)(x-z)$, so können wir in naheliegender Weise Sicherheitsabschläge einführen, indem wir α_0 durch $\hat{\alpha}_0 = \alpha_0 + \alpha_0^\Delta$ und α_1 durch $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + \alpha_1^\Delta$ mit $\alpha_0^\Delta < 0, \alpha_1^\Delta < 0$ ersetzen.

Für $\text{logit}(\hat{q}(x,t)) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t + (\beta_0 + \beta_1 t)(x-z)$ betrachten nun das Verhältnis der Sterbewahrscheinlichkeiten 1. und 2. Ordnung $f_{x,t}(\alpha_0^\Delta, \alpha_1^\Delta) := \frac{\hat{q}(x,t)}{q(x,t)}$. Es gilt:

$$f_{x,t}(\alpha_0^\Delta, \alpha_1^\Delta) \approx f_{x,t}(0,0) + \alpha_0^\Delta \frac{\partial f_{x,t}}{\partial \alpha_0}(0,0) + \alpha_1^\Delta \frac{\partial f_{x,t}}{\partial \alpha_1}(0,0) = 1 + (\alpha_0^\Delta + \alpha_1^\Delta t)p(x,t).$$

Bemerkung: Für $\alpha_0^\Delta := -\Delta \beta_0$ und $\alpha_1^\Delta := -\Delta \beta_1$ ergibt sich $\hat{q}(x,t) = q(x - \Delta, t)$. Eine Altersverschiebung kann also im *CBD-Modell* durch eine Anpassung der Parameter *exakt* abgebildet werden. Das Instrument der Altersverschiebung wird auch angewendet, um aus einer Basistafel Projektionstafeln zu erstellen. Gilt für die Basistafel

$$p_B(x) = \left(1 + \exp(\kappa_1 + \kappa_2(x-z))\right)^{-1}$$

und wählt man eine von t linear abhängige Altersverschiebung $\Delta_t = \gamma t$, so ergibt sich für die Projektionstafeln $p(x,t) := p_B(x - \Delta_t)$:

$$p(x,t) = \left(1 + \exp(\kappa_1 - \kappa_2 \gamma t + \kappa_2(x-z))\right)^{-1}.$$

Kalibrierung des Sicherheitsabschlags $\alpha_0^\Delta < 0$

Wir kalibrieren die Parameter des Modells $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)$ so, dass die hieraus abgeleiteten Überlebenswahrscheinlichkeiten als *beste Schätzer* der tatsächlichen Überlebenswahrscheinlichkeiten dienen können. Das Modell wird also ohne *Sicherheitszuschläge* auf die Überlebenswahrscheinlichkeiten (bzw. *Sicherheitabschläge* auf die Sterblichkeit) kalibriert.

Wir bestimmen den Sicherheitsabschlag α_0^Δ so, dass die (deterministischen) Überlebenswahrscheinlichkeiten 1. Ordnung $\hat{p}(x,t)$ „mit großer Wahrscheinlichkeit“ die

stochastischen Überlebenswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}(x, t)$ nicht unterschreiten. Da

$$\hat{p}(x, t) = (1 + \exp(\alpha_0^\Delta) g(x, t))^{-1} \text{ und } \tilde{p}(x, t) = (1 + \exp(\sigma_\alpha W'_{t+1}) g(x, t))^{-1} \text{ gilt}$$

$$\tilde{p}(x, t) \leq \hat{p}(x, t) \Leftrightarrow W'_{t+1} \geq \alpha_0^\Delta / \sigma_\alpha.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{P}(\tilde{p}(x, t) \leq \hat{p}(x, t) \text{ für alle } t \in [0, T-1]) = \mathbf{P}(\text{Min}(W'_t, t \in [0, T]) \geq c_0 / \sigma_\alpha).$$

Für ein gegebenes Sicherheitsniveau von $1 - \delta$ folgt somit ²⁸

$$\mathbf{P}(\text{Min}(W'_t, t \in [0, T]) \geq \alpha_0^\Delta / \sigma_\alpha) \geq 1 - \delta \Leftrightarrow \alpha_0^\Delta \leq -\sqrt{T} \sigma_\alpha \Phi^{-1}(1 - \frac{1}{2}\delta),$$

hierbei bezeichne Φ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Für $1 - \delta = 0.95$, $T = 60$ und $\sigma_\alpha = 0.04$ ergibt sich beispielsweise $\alpha_0^\Delta = -0.6073$.

Bemerkung: $f_{x,t}(\alpha_0^\Delta, 0) = \frac{\hat{q}(x, t)}{q(x, t)} = \frac{1 - (1 + \hat{g}(x, t))^{-1}}{1 - (1 + g(x, t))^{-1}} = \frac{1}{1 + (\exp(-\alpha_0^\Delta) - 1)p(x, t)}$; der Si-

cherheitsabschlag ist also alters- und trendabhängig.

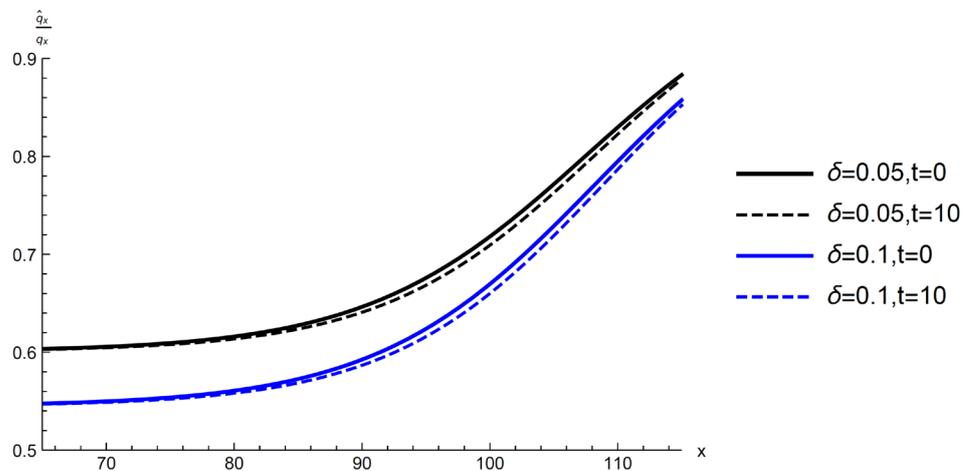


ABBILDUNG 23: Sicherheitsabschläge auf die Sterbewahrscheinlichkeiten für die Alter $x = 65 - 115$ der Periodentafel für $t = 0$ und $t = 10$, hybrider Bestand, Sicherheitsniveau $1 - \delta = 95\%$ bzw. $1 - \delta = 90\%$, $T=60$, $\sigma_\alpha = 0.04$.

²⁸ Für Verteilung von $\text{Min}(W_t : 0 \leq t \leq T)$ bzw. $\text{Max}(W_t : 0 \leq t \leq T)$ vgl. [Karatzas/ Shreve 1991] S. 96.

5.3 Stochastik der Deckungsrückstellung im *CBD-Modell*

Wir betrachten die Zufallsvariable $Y_{t+1} = \ln\left(\frac{V(t+1)}{V^{(e)}(t+1)}\right) = \ln\left(\frac{v(t+1)}{v^{(e)}(t+1)}\right)$ in Abhängigkeit von der Veränderung $w_\Delta := W'_{t+1} - W'_t$ - vgl. Proposition 1, (Gl. 26).

Proposition 5

Es gilt

$$v(t+1) \frac{dY_{t+1}}{dw_\Delta} = -\sigma_\alpha \sum_{x=z}^{\omega} \left(L_x(t+1) \sum_{k=0}^{\omega-x} q_{x-1+k}(t+k, t+1) {}_k a(x, t+1, t+1) \right).$$

Beweis:

$$\exp(Y_{t+1}) = \frac{v(t+1)}{v^{(e)}(t+1)} = \frac{\sum_{x=z}^{\omega} a(x, t+1, t+1) L_x(t+1)}{\sum_{x=z}^{\omega} a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1)} = \frac{\sum_{x=z}^{\omega} h(x, t+1) a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1)}{\sum_{x=z}^{\omega} a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1)}$$

$$\text{mit } h(x, t+1) := \frac{a(x, t+1, t+1) L_x(t+1)}{a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1)}.$$

$$\text{Für } x = z \text{ gilt } L_z(t+1) = L_z^{(e)}(t+1) \text{ und somit } h(z, t+1) = \frac{a(z, t+1, t+1)}{a(z, t+1, t)}.$$

$$\text{Bemerkung: Für } x \geq z+1 \text{ gilt: } h(x, t+1) = \frac{a(x, t+1, t+1) L_x(t+1)}{a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1)} = \frac{a(x-1, t+1, t+1) - 1}{a(x-1, t, t) - 1}.$$

Für $t' \geq t, x' \geq z$ definieren wir $\tilde{g}(x', t') := \exp(\sigma_\alpha w'_t) g(x', t')$ - vgl. (Gl. 3) - und wir setzen abkürzend $X := \exp(\sigma_\alpha (W'_{t+1} - W'_t)) = \exp(\sigma_\alpha w_\Delta)$. Dann gilt für $x > z$:

$$\frac{L_x(t+1)}{L_x^{(e)}(t+1)} = \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} = \frac{1 + \exp(\sigma_\alpha w'_t) g(x-1, t)}{1 + \exp(\sigma_\alpha w'_{t+1}) g(x-1, t)} = \frac{1 + \tilde{g}(x-1, t)}{1 + X \tilde{g}(x-1, t)},$$

Für $x \geq z$ gilt

$$\frac{a(x, t+1, t+1)}{a(x, t+1, t)} = \frac{\sum_{k=0}^{\omega-x} e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t+1)}{\sum_{k=0}^{\omega-x} e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t)} = \frac{\sum_{k=0}^{\omega-x} f_k(x, t+1) e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t)}{\sum_{k=0}^{\omega-x} e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t)}$$

mit $f_k(x, t+1) := \frac{{}_k p_x(t+1, t+1)}{{}_k p_x(t+1, t)} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1 + \tilde{g}(x+j, t+1+j)}{1 + X \tilde{g}(x+j, t+1+j)} \right)$, für $k=0$ sei dabei

$f_0(x, t+1) = 1$. Setze für $x > z$:

$$\hat{f}_k(x, t+1) := \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \frac{{}_k p_x(t+1, t+1)}{{}_k p_x(t+1, t)} = \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} f_k(x, t+1)$$

und für $x = z$: $\hat{f}_k(z, t+1) := f_k(z, t+1)$.

Dann erhält man für alle $x \geq z$ die Darstellung:

$$h(x, t+1) = \frac{\sum_{k=0}^{\omega-x} \hat{f}_k(x, t+1) e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t)}{\sum_{k=0}^{\omega-x} e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t)} = \frac{\sum_{k=0}^{\omega-x} \hat{f}_k(x, t+1) e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t)}{a(x, t+1, t)}.$$

Wir betrachten $h(x, t+1)$ als Funktion von w_Δ . Dann gilt für die Ableitung:

$$a(x, t+1, t) \frac{dh(x, t+1)}{dw_\Delta} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{d \hat{f}_k(x, t+1)}{dw_\Delta} e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t)$$

Für $x > z$ gilt: $\frac{d \hat{f}_k(x, t+1)}{dw_\Delta} = -\sigma_\alpha \hat{f}_k(x, t+1) \sum_{j=0}^k \left(1 - (1 + X \tilde{g}(x-1+j, t+j))^{-1} \right)$

und für $x = z$: $\frac{d \hat{f}_z(x, t+1)}{dw_\Delta} = -\sigma_\alpha \hat{f}_z(x, t+1) \sum_{j=1}^k \left(1 - (1 + X \tilde{g}(x-1+j, t+j))^{-1} \right)$.

Begründung hierfür:

$$\begin{aligned} \frac{d \hat{f}_k(x, t+1)}{dw_\Delta} &= \frac{d}{dw_\Delta} \exp\left(\ln\left(\hat{f}_k(x, t+1)\right)\right) = \hat{f}_k(x, t+1) \frac{d \ln\left(\hat{f}_k(x, t+1)\right)}{dw_\Delta} \\ &= \hat{f}_k(x, t+1) \frac{d}{dw_\Delta} \left(\sum_{j=0}^k \ln\left(\frac{1 + \tilde{g}(x-1+j, t+j)}{1 + X \tilde{g}(x-1+j, t+j)}\right) \right) \\ &= \hat{f}_k(x, t+1) \left(\sum_{j=0}^k \frac{d}{dw_\Delta} \ln\left(\frac{1 + \tilde{g}(x-1+j, t+j)}{1 + X \tilde{g}(x-1+j, t+j)}\right) \right) \\ &= -\hat{f}_k(x, t+1) \left(\sum_{j=0}^k \frac{d}{dw_\Delta} \ln(1 + X \tilde{g}(x-1+j, t+j)) \right) \\ &= -\sigma_\alpha \hat{f}_k(x, t+1) \left(\sum_{j=0}^k \frac{X \tilde{g}(x-1+j, t+j)}{1 + X \tilde{g}(x-1+j, t+j)} \right) \\ &= -\sigma_\alpha \hat{f}_k(x, t+1) \sum_{j=0}^k \left(1 - (1 + X \tilde{g}(x-1+j, t+j))^{-1} \right). \end{aligned}$$

Für $t' \geq t-1$ und $x \geq z$ betrachten wir

$$q_x(t', t) := 1 - p_x(t', t) = 1 - (1 + \exp(\sigma_\alpha w'_t) g(x, t'))^{-1} = 1 - (1 + \tilde{g}(x, t'))^{-1} \text{ und}$$

$$q_x(t', t+1) := 1 - p_x(t', t+1) = 1 - (1 + X \tilde{g}(x, t'))^{-1};$$

ferner setzen wir für $x = z-1$: $q_{z-1}(t', t+1) := 0$.

$q_x(t', t)$ ist die geschätzte 1-jährige Sterbewahrscheinlichkeit einer zum Zeitpunkt t' x -jährigen Person; die Schätzung basiert auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt t . Die Zufallsvariable $q_x(t', t+1)$ bezeichnet den gleichen Wert, jedoch basierend auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt $t+1$ – also unter Berücksichtigung der Korrektur

$$w_\Delta = W'_{t+1} - W'_t.$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir somit:

$$\frac{d \hat{f}_k(x, t+1)}{d w_\Delta} = -\sigma_\alpha \hat{f}_k(x, t+1) \sum_{j=0}^k q_{x-1+j}(t+j, t+1).$$

Für $x > z$ folgt wegen $\hat{f}_k(x, t+1) = \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \frac{{}_k p_x(t+1, t+1)}{{}_k p_x(t+1, t)}$:

$$\begin{aligned} a(x, t+1, t) \frac{dh(x, t+1)}{d w_\Delta} &= \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{d \hat{f}_k(x, t+1)}{d w_\Delta} e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t) \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x} \left(-\sigma_\alpha \hat{f}_k(x, t+1) \sum_{j=0}^k q_{x-1+j}(t+j, t+1) \right) e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t) \\ &= -\sigma_\alpha \sum_{k=0}^{\omega-x} \sum_{j=0}^k q_{x-1+j}(t+j, t+1) e^{-k\mu} \hat{f}_k(x, t+1) {}_k p_x(t+1, t) \\ &= -\sigma_\alpha \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \sum_{k=0}^{\omega-x} \sum_{j=0}^k q_{x-1+j}(t+j, t+1) e^{-k\mu} \frac{{}_k p_x(t+1, t+1)}{{}_k p_x(t+1, t)} {}_k p_x(t+1, t) \\ &= -\sigma_\alpha \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \sum_{k=0}^{\omega-x} \sum_{j=0}^k q_{x-1+j}(t+j, t+1) e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t+1) \\ &= -\sigma_\alpha \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \sum_{j=0}^{\omega-x} \sum_{k=j}^{\omega-x} q_{x-1+j}(t+j, t+1) e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t+1) \\ &= -\sigma_\alpha \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \sum_{j=0}^{\omega-x} q_{x-1+j}(t+j, t+1) \sum_{k=j}^{\omega-x} e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t+1) \\ &= -\sigma_\alpha \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \sum_{j=0}^{\omega-x} q_{x-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(x, t+1, t+1) \end{aligned}$$

Hierbei ist ${}_j a(x, t+1, t+1) := \sum_{k=j}^{\omega-x} e^{-k\mu} {}_k p_x(t+1, t+1)$ der Barwert einer um j Jahre aufge-

schobene Leibrente für eine zum Zeitpunkt $t+1$ x -jährige Person. Man beachte hierbei, dass ${}_j a(x, t+1, t+1)$ eine von $X = \exp(\sigma_\alpha w_\Delta)$ abhängige Zufallsvariable darstellt.

Für $x = z$ erhalten wir entsprechend wegen $\frac{d \hat{f}_0(z, t+1)}{dw_\Delta} = 0$:

$$\begin{aligned}
 a(z, t+1, t) \frac{dh(z, t+1)}{dw_\Delta} &= \sum_{k=1}^{\omega-z} \frac{d \hat{f}_k(z, t+1)}{dw_\Delta} e^{-k\mu} {}_k p_z(t+1, t) \\
 &= \sum_{k=1}^{\omega-z} \left(-\sigma_\alpha \hat{f}_k(z, t+1) \sum_{j=1}^k q_{z-1+j}(t+j, t+1) \right) e^{-k\mu} {}_k p_z(t+1, t) \\
 &= -\sigma_\alpha \sum_{k=1}^{\omega-z} \sum_{j=1}^k q_{z-1+j}(t+j, t+1) e^{-k\mu} \hat{f}_k(z, t+1) {}_k p_z(t+1, t) \\
 &= -\sigma_\alpha \sum_{k=1}^{\omega-z} \sum_{j=1}^k q_{z-1+j}(t+j, t+1) e^{-k\mu} \left(\frac{{}_k p_z(t+1, t+1)}{{}_k p_z(t+1, t)} \right) {}_k p_z(t+1, t) \\
 &= -\sigma_\alpha \sum_{k=1}^{\omega-z} \sum_{j=1}^k q_{z-1+j}(t+j, t+1) e^{-k\mu} {}_k p_z(t+1, t+1) \\
 &= -\sigma_\alpha \sum_{j=1}^{\omega-z} \sum_{k=j}^{\omega-z} q_{z-1+j}(t+j, t+1) e^{-k\mu} {}_k p_z(t+1, t+1) \\
 &= -\sigma_\alpha \sum_{j=1}^{\omega-z} q_{z-1+j}(t+j, t+1) \sum_{k=j}^{\omega-z} e^{-k\mu} {}_k p_z(t+1, t+1) \\
 &= -\sigma_\alpha \sum_{j=1}^{\omega-z} q_{z-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(z, t+1, t+1).
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir für $x > z$:

$$a(x, t+1, t) \frac{dh(x, t+1)}{dw_\Delta} = -\sigma_\alpha \frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \sum_{j=0}^{\omega-x} q_{x-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(x, t+1, t+1)$$

und für $x = z$:

$$a(z, t+1, t) \frac{dh(z, t+1)}{dw_\Delta} = -\sigma_\alpha \sum_{j=1}^{\omega-z} q_{z-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(z, t+1, t+1)$$

Somit erhalten wir

$$\frac{d}{dw_\Delta} Y_{t+1} = \frac{d}{dw_\Delta} \ln \left(\frac{\sum_{x=z}^{\omega} h(x, t+1) a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1)}{\sum_{x=z}^{\omega} a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dw_\Delta} \ln \left(\sum_{x=z}^{\omega} h(x, t+1) a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1) \right) \\
&= \frac{\sum_{x=z}^{\omega} \left(a(x, t+1, t) \frac{dh(x, t+1)}{dw_\Delta} \right) L_x^{(e)}(t+1)}{\sum_{x=z}^{\omega} h(x, t+1) a(x, t+1, t) L_x^{(e)}(t+1)} \\
&= \frac{\sum_{x=z}^{\omega} \left(a(x, t+1, t) \frac{dh(x, t+1)}{dw_\Delta} \right) L_x^{(e)}(t+1)}{v(t+1)}
\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit Hilfe der obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
v(t+1) \frac{d}{dw_\Delta} \tau_{t+1} &= \sum_{x=z}^{\omega} \left(a(x, t+1, t) \frac{dh(x, t+1)}{dw_\Delta} \right) L_x^{(e)}(t+1) \\
&= a(z, t+1, t) \frac{dh(z, t+1)}{dw_\Delta} L_z(t+1) + \sum_{x=z+1}^{\omega} \left(a(x, t+1, t) \frac{dh(x, t+1)}{dw_\Delta} \right) L_x^{(e)}(t+1) \\
&= -\sigma_\alpha \left\{ \begin{aligned} &L_z(t+1) \sum_{j=1}^{\omega-z} q_{z-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(z, t+1, t+1) \\ &+ \sum_{x=z+1}^{\omega} \left(\frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} \sum_{j=0}^{\omega-x} q_{x-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(x, t+1, t+1) \right) L_x^{(e)}(t+1) \end{aligned} \right\} \\
&= -\sigma_\alpha \left\{ \begin{aligned} &L_z(t+1) \sum_{j=1}^{\omega-z} q_{z-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(z, t+1, t+1) \\ &+ \sum_{x=z+1}^{\omega} \left(L_x(t+1) \sum_{j=0}^{\omega-x} q_{x-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(x, t+1, t+1) \right) \end{aligned} \right\},
\end{aligned}$$

da für $x > z$ $\frac{p_{x-1}(t, t+1)}{p_{x-1}(t, t)} L_x^{(e)}(t+1) = L_x(t+1)$ und für $x = z$ $L_z^{(e)}(t+1) = L_z(t+1)$

gilt. Setzen wir noch $q_{z-1}(t, t+1) = 0$, so erhalten wir schließlich

$$v(t+1) \frac{dY_{t+1}}{dw_\Delta} = -\sigma_\alpha \sum_{x=z}^{\omega} \left(L_x(t+1) \sum_{j=0}^{\omega-x} q_{x-1+j}(t+j, t+1) {}_j a(x, t+1, t+1) \right).$$

□

Wir können also die Zufallsvariable Y_{t+1} in Abhängigkeit von $w_\Delta := W'_{t+1} - W'_t$ wie folgt linear approximierten:

$Y_{t+1} \approx -\sigma_\alpha \phi_t w_\Delta$, wobei

$$\phi_t := \left. \frac{d Y_{t+1}}{d w_\Delta} \right|_{w_\Delta=0} = \sum_{x=z}^{\omega} \left(L_x^{(e)}(t+1) \sum_{k=0}^{\omega-x} q_{x-1+k}(t+k, t) {}_k a(x, t+1, t) \right)$$

und $q_{z-1}(t, t) = 0$.

ϕ_t ist ein weiterer Strukturparameter, der zum Zeitpunkt t berechnet werden kann. Wir

können dabei $L_x^{(e)}(t+1) \sum_{k=0}^{\omega-x} q_{x-1+k}(t+k, t) {}_k a(x, t+1, t)$ interpretieren als Schätzung des

Barwertes der künftig durch Todesfälle fortfallenden Renten des Bestandes von $L_{x-1}(t)$ Rentner des Alters $x-1$ zum Zeitpunkt t .

5.4 Die aktuarielle Tontine

5.4.1 Definition

Bei der klassischen Tontine²⁹ erhalten die Einleger eine laufende Verzinsung ihrer Einlagen, der Kapitalstock der Tontine (Summe der Einlagen) wird nicht verzehrt, sondern an den letzten Überlebenden (oder eine kleine Gruppe der letzten Überlebenden) verteilt. Insofern hat diese Art der Tontine den Charakter einer (Überlebens-) Lotterie. Bei der *aktuariellen Tontine*, die im Folgenden vorgestellt werden soll, wird der Kapitalstock der Tontine aufgezehrt und zwar in der Weise, dass das Restkapital, das auf die Überlebenden übertragen wird, gerade ausreicht, um den Überlebenden eine gleichbleibende oder gleichmäßig steigende Rente finanzieren zu können. Ändern sich die biometrischen Rechnungsgrundlagen nicht und entspricht die tatsächlich erzielte Verzinsung dem Rechnungszins, so bietet die aktuarielle Tontine eine gleichbleibende (oder gleichmäßig steigende) Rente für alle Rentner. Die *aktuarielle Tontine* hat also Versicherungscharakter. Ändern sich die Rechnungsgrundlagen und/oder entspricht die tatsächliche Verzinsung des Kapitalstocks nicht dem Rechnungszins, so werden die Renten nach oben oder nach unten angepasst.

²⁹ vgl. [McKeever 2010]

Wir verwenden die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.2. Demnach bezeichnet

$$a(z+k, t_0+k, t_0+k) = \sum_{l=0}^{\omega-z-k} {}_l p_{z+k}(t_0+k, t_0+k) \exp(-l\mu) \text{ für } k=0,1,\dots,\omega-z$$

den Rentenbarwert für eine (zum Zeitpunkt t_0+k) $z+k$ -jährige Person, wobei die geschätzten Überlebenswahrscheinlichkeiten auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt t_0+k basieren. Wir unterstellen einen gleichbleibenden Rechnungszins μ .

Wir betrachten die Generation $G = G(t_0)$, die zum Zeitpunkt t_0 im Alter von z in den Ruhestand tritt. Der anfängliche Kapitalstock (Einmalbeitrag für die Tontine) der Generation G betrage $P(t_0)$, L_{z+k} bezeichne die Anzahl der Überlebenden der Generation G zum Zeitpunkt t_0+k ($k=0,1,\dots,\omega-z$). Auf der Grundlage der zum Zeitpunkt t_0 verfügbaren Informationen hinsichtlich der Sterblichkeit und unter Berücksichtigung eines kalkulatorischen Zinssatzes μ kann aus dem anfänglichen Kapitalstock eine gleichbleibende Rente in Höhe von

$$r(t_0) = \frac{P(t_0)}{a(z, t_0, t_0) L_z(t_0)}$$

finanziert werden.

Wir wollen etwas allgemeiner annehmen, dass aus dem Kapitalstock eine um ε *gleichbleibend steigende Rente* finanziert werden soll. Die anfängliche Rente beträgt dann

$$r(t_0) = \frac{P(t_0)}{a_\varepsilon(z, t_0, t_0) L_z(t_0)}$$

mit $a_\varepsilon(z+k, t_0+k, t_0+k) := \sum_{l=0}^{\omega-z-k} {}_l p_{z+k}(t_0+k, t_0+k) \exp(-l(\mu-\varepsilon))$.

Entsprechend dem jeweils vorhandenen Vermögen beträgt die Rente zu Beginn des $k+1$ -ten Jahren:

$$r(t_0+k) = \frac{P(t_0+k)}{a_\varepsilon(z+k, t_0+k, t_0+k) L_{z+k}}$$

Für $k=0,1,\dots,\omega-z-1$ bezeichne μ_k die *tatsächliche* Portfolioverzinsung im Zeitintervall $[t_0+k, t_0+k+1]$. Für den Kapitalstock der Tontine gilt folgende Rekursion:

$$P(t_0+k+1) = (P(t_0+k) - L_{z+k} r(t_0+k)) \exp(\mu_k).$$

Da $r(t_0 + k + 1) = \frac{P(t_0 + k + 1)}{a_\varepsilon(z + k + 1, t_0 + k + 1, t_0 + k + 1) L_{z+k+1}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} r(t_0 + k + 1) &= \exp(\mu_k) \frac{r(t_0 + k) a_\varepsilon(z + k, t_0 + k, t_0 + k) L_{z+k} - r(t_0 + k) L_{z+k}}{a_\varepsilon(z + k + 1, t_0 + k + 1, t_0 + k + 1) L_{z+k+1}} \\ &= \exp(\mu_k) r(t_0 + k) \frac{L_{z+k}}{L_{z+k+1}} \frac{a_\varepsilon(z + k, t_0 + k, t_0 + k) - 1}{a_\varepsilon(z + k + 1, t_0 + k + 1, t_0 + k + 1)}. \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{p_{z+k}(t_0 + k, t_0 + k + 1)} = \frac{L_{z+k}}{L_{z+k+1}}$ ³⁰ und

$$\begin{aligned} p_{z+k}(t_0 + k, t_0 + k + 1) a_\varepsilon(z + k + 1, t_0 + k + 1, t_0 + k + 1) \\ = \exp(\mu - \varepsilon) (a_\varepsilon(z + k, t_0 + k, t_0 + k) - 1) \end{aligned}$$

folgt:

$$\frac{r(t_0 + k + 1)}{r(t_0 + k)} = \exp(\mu_k - \mu + \varepsilon) \frac{a_\varepsilon(z + k, t_0 + k, t_0 + k) - 1}{a_\varepsilon(z + k + 1, t_0 + k + 1, t_0 + k + 1) - 1}.$$

Setzen wir abkürzend $\delta_k := \ln\left(\frac{a_\varepsilon(z + k, t_0 + k, t_0 + k) - 1}{a_\varepsilon(z + k + 1, t_0 + k + 1, t_0 + k + 1) - 1}\right)$, so erhalten wir

$$\frac{r(t_0 + k + 1)}{r(t_0 + k)} = \exp(\mu_k - \mu + \varepsilon - \delta_k) \text{ bzw. } \frac{r(t_0 + k)}{r(t_0)} = \exp\left(-k(\mu - \varepsilon) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j - \delta_j\right).$$

5.4.2 Generationenrendite bei einer Tontine

Als *Generationenrendite* der Generation $G = G(t_0)$ bezeichnen wir den Zinssatz μ_G , für den der Barwert des Cashflows der Rentenzahlungen der Einmalprämie entspricht. Die Bestimmungsgleichung der Generationenrendite lautet also

$$\begin{aligned} P(t_0) &= \sum_{k=0}^{\omega-z} \exp(-k \mu_G) L_{z+k} r(t_0 + k) \\ \Leftrightarrow a_\varepsilon(z, t_0, t_0) &= \sum_{k=0}^{\omega-z} \exp(-k \mu_G) \frac{L_{z+k}}{L_z} \frac{r(t_0 + k)}{r(t_0)}. \end{aligned}$$

³⁰ Hierbei haben wir implizit auf die Ganzzahligkeitsbedingung der Anzahl der überlebenden Rentner verzichtet, was aber in diesem Kontext keine Einschränkung bedeutet.

Da $a_\varepsilon(z, t_0, t_0) = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k(\mu - \varepsilon))$, $\frac{L_{z+k}}{L_z} = {}_k p_z(t_0, t_0 + k)$ und

$\frac{r(t_0 + k)}{r(t_0)} = \exp\left(-k(\mu - \varepsilon) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j - \delta_j\right)$ ergibt sich schließlich

$$\sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k(\mu - \varepsilon)) = \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0 + k) \exp\left(-k(\mu - \varepsilon) + \sum_{j=0}^{k-1} (\mu_k - \delta_k - \mu_G)\right) \quad (\text{Gl. 37})$$

Bei *rechnungsmäßigem Verlauf* der Sterblichkeit gilt ${}_k p_z(t_0, t_0) = {}_k p_z(t_0, t_0 + k)$ und $\delta_k = 0$. Für die Bestimmungsgleichung von μ_G gilt dann:

$$\sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp(-k(\mu - \varepsilon)) = \sum_{k=0}^{\omega-z} {}_k p_z(t_0, t_0) \exp\left(-k(\mu - \varepsilon) + \sum_{j=0}^{k-1} (\mu_k - \mu_G)\right).$$

μ_G ist somit der gewogene Durchschnitt der Periodenrenditen. Bei einer gleichbleibenden Portfoliorendite $\mu_k = \mu_p$ gilt somit $\mu_G = \mu_p$. Im allgemeinen Fall ist die Generationenrendite eine stochastische Größe, die von der Stochastik der Sterblichkeitsentwicklung und der Portfoliorendite abhängt.

Bemerkung:

1. Die laufende Rentenanpassung beträgt $\varepsilon_k := \ln\left(\frac{r(t_0 + k + 1)}{r(t_0 + k)}\right) = \mu_k - \mu + \varepsilon - \delta_k$.

Wählt man einen vergleichsweise niedrigen Rechnungszins und/ oder vorsichtige biometrische Rechnungsgrundlagen (dann ist im Durchschnitt $\delta_k < 0$) zur Bestimmung der Tontinnenrente, so führt das zu entsprechend niedrigeren anfänglichen Renten verbunden mit höheren Rentenanpassungen. Wählt man also bei der aktuariellen Tontine einen sehr niedrigen (im Extremfall sogar einen negativen) Rechnungszins und über vorsichtige biometrische Rechnungsgrundlagen, so bedeutet dies eine Umverteilung der Mittel auf die Überlebenden zu Lasten der früh Versterbenden. Im Extremfall wird dann die aktuarielle Tontine wie die konventionelle Tontine zu einer (Überlebens-) Lotterie.

2. Eine faire Verteilung zwischen den Generationen ist gegeben, wenn der Rechnungszins so festgesetzt wird, dass die erwartete Überrendite (Portfolioverzinsung abzüglich Rechnungszins) die Geldentwertung (Inflation) ausgleicht. Vorsichtige Annahmen

hinsichtlich der biometrischen Rechnungsgrundlagen sind jedenfalls bei der aktuariellen Tontine nicht erforderlich.

5.4.3 Rendite-Risiko-Profil einer Tontine

Die Generationenrendite μ_G ist eine stochastische Größe, die von der Sterblichkeitsentwicklung und vom Kapitalmarktverlauf abhängt. Wie oben dargestellt, entspricht bei einem *rechnungsmäßigen* Verlauf die Generationenrendite genau der Portfoliorendite. Aufgrund der Schiefe der zugrundeliegenden Verteilungen bedeutet dies nicht, dass die *erwartete* Generationenrendite und die *erwartete* Portfoliorendite übereinstimmen. Wie die Simulationsrechnungen zeigen (s.u.) ist tatsächlich der Unterschied *nicht* vernachlässigbar.

Wir betrachten zwei verschiedene Risikokonzepte für das Tontinengeschäft. Zum einen betrachten wir die *Standardabweichung der Generationenrendite* und zum anderen die Volatilität der Rentenzahlungen, genauer die *Standardabweichung der Rentenanpassungen* als Maßzahlen für das Rentenrisiko.

Den Simulationsrechnungen liegt die Kalibrierung des Abschnitts 4.1 zugrunde, insbesondere unterstellen wir einen Rechnungszins von $\mu = 0.02$ und eine von der Risikoexposition σ abhängige erwartete Portfoliorendite von $\mu_p(\sigma) = 0.02 + 0.25\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2$. Die tatsächlichen Portfoliorenditen μ_k sind stochastisch und lassen sich in unserem Kapitalmarktmodell (Abschnitt 2.3) wie folgt darstellen:

$$\mu_k = \bar{\mu} + \sigma r_M - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma(w_{k+1} - w_k) \quad \text{für } k = 0, \dots, \omega - z - 1,$$

wobei $(w_0 = 0, w_1, w_2, \dots)$ eine Realisation von $(W_t)_{t=0,1,2,\dots}$ ist.

Das *CBD-Modell* kalibrieren wir mit den Parametern für einen gemischten (hybriden) Bestand – vgl. Tabelle 1; insbesondere unterstellen wir einen Sterblichkeitstrend (*Variante 1*). Wir betrachten die Sparergeneration $G = G(t_0)$, die zum Zeitpunkt $t_0 = 10$ im Alter 65 in den Rentenbezug eintritt. Da wir das *CBD-Modell* nach den Richttafeln 2005G kalibriert haben, entspricht dies einem Renteneintritt im Jahre 2015. Für eine Rente in Höhe von 1 beträgt die Einmalprämie $a(z, t_0, t_0) = a(65, 10, 10) = 17.146404$.

Die folgenden Tabellen 8 und 9 fassen die Auswertungen der Simulationsläufe zusammen, Tabelle 8 enthält die Ergebnisse für eine deterministische Sterblichkeitsentwick-

lung, Tabelle 9 für den Fall $\sigma_\alpha = 0.04$. Die Standardabweichung der Generationenrendite steigt proportional zur Risikoexposition, während die Volatilität der Rentenanpassung überproportional steigt - vgl. Abb. 24.

Die Tabellen zeigen aber auch, dass sich Risiko lohnt, da die mittleren Generationenrendite ebenfalls proportional mit der Risikoexposition ansteigen, allerdings steigt auch die Wahrscheinlichkeit, dass die Generationenrendite niedriger ausfällt als der Rechnungszins.

Risiko σ_p	Mittelw μ_G	Stabw μ_G	Wkeit $\mu_G < \mu$	Quantile μ_G				Vola ε -Pfade
				1%	5%	10%	50%	
0.00	2.00%	0.00%	100.00%	2.00%	2.00%	2.00%	2.00%	0.00%
0.02	2.49%	0.46%	14.50%	1.42%	1.73%	1.90%	2.49%	1.99%
0.04	2.94%	0.93%	15.42%	0.79%	1.41%	1.75%	2.93%	3.98%
0.06	3.38%	1.39%	15.96%	0.21%	1.12%	1.61%	3.37%	5.97%
0.08	3.78%	1.85%	16.85%	-0.41%	0.76%	1.42%	3.76%	7.96%
0.10	4.17%	2.32%	17.37%	-1.11%	0.42%	1.24%	4.14%	9.95%
0.12	4.49%	2.80%	18.95%	-1.81%	-0.04%	0.92%	4.45%	11.94%
0.14	4.83%	3.25%	19.29%	-2.46%	-0.44%	0.70%	4.78%	13.92%
0.16	5.12%	3.70%	20.32%	-3.22%	-0.85%	0.42%	5.06%	15.92%
0.18	5.42%	4.20%	21.11%	-3.86%	-1.30%	0.12%	5.30%	17.90%
0.20	5.61%	4.66%	22.18%	-4.74%	-1.89%	-0.31%	5.50%	19.88%

Tabelle 8: Auswertung zum Risiko-Rendite-Profil der Generationenrendite *ohne* stochastischer Sterblichkeitsentwicklung ($\sigma_\alpha = 0$); jeweils 50 000 Simulationen.

Risiko σ_P	Mittelw μ_G	Stabw μ_G	Wkeit $\mu_G < \mu$	Quantile μ_G				Vola &Pfade
				1%	5%	10%	50%	
0.00	2.00%	0.02%	48.03%	1.96%	1.97%	1.98%	2.00%	2.62%
0.02	2.49%	0.46%	14.45%	1.42%	1.73%	1.90%	2.49%	3.29%
0.04	2.95%	0.93%	15.17%	0.81%	1.44%	1.77%	2.95%	4.77%
0.06	3.38%	1.39%	15.93%	0.21%	1.10%	1.60%	3.37%	6.52%
0.08	3.80%	1.86%	16.79%	-0.41%	0.79%	1.44%	3.77%	8.38%
0.10	4.16%	2.32%	17.59%	-1.07%	0.40%	1.20%	4.13%	10.29%
0.12	4.49%	2.79%	18.80%	-1.78%	-0.01%	0.95%	4.45%	12.23%
0.14	4.82%	3.27%	19.57%	-2.59%	-0.41%	0.70%	4.77%	14.18%
0.16	5.13%	3.74%	20.00%	-3.31%	-0.88%	0.39%	5.04%	16.12%
0.18	5.42%	4.21%	21.00%	-3.93%	-1.33%	0.11%	5.31%	18.10%
0.20	5.64%	4.69%	22.03%	-4.81%	-1.88%	-0.28%	5.53%	20.07%

Tabelle 9: Auswertung zum Risiko-Rendite-Profil der Generationenrendite mit stochastischer Sterblichkeitsentwicklung ($\sigma_\alpha = 0.04$); jeweils 50 000 Simulationen.

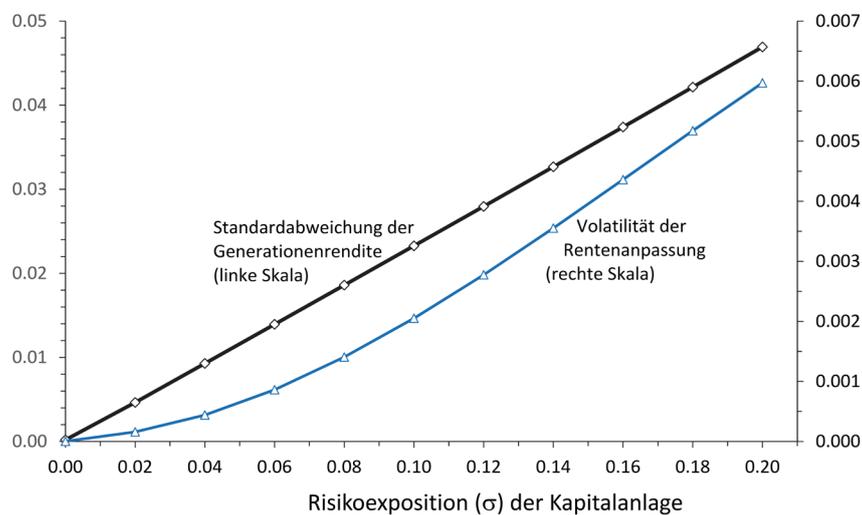


ABBILDUNG 24: Die Standardabweichung der Generationenrendite und die Volatilität der Rentenanpassung in Abhängigkeit von der Risikoexposition der Kapitalanlagen; stochastischer Sterblichkeitsentwicklung ($\sigma_\alpha = 0.04$); jeweils 10 000 Simulationen.

Zur Darstellung des Rendite-Risiko Profils wählen wir als Maßzahl zum einen die Standardabweichung der Generationenrenditen (Abb. 25) und zum anderen die Volatilität der Rentenanpassungen (Abb. 26).

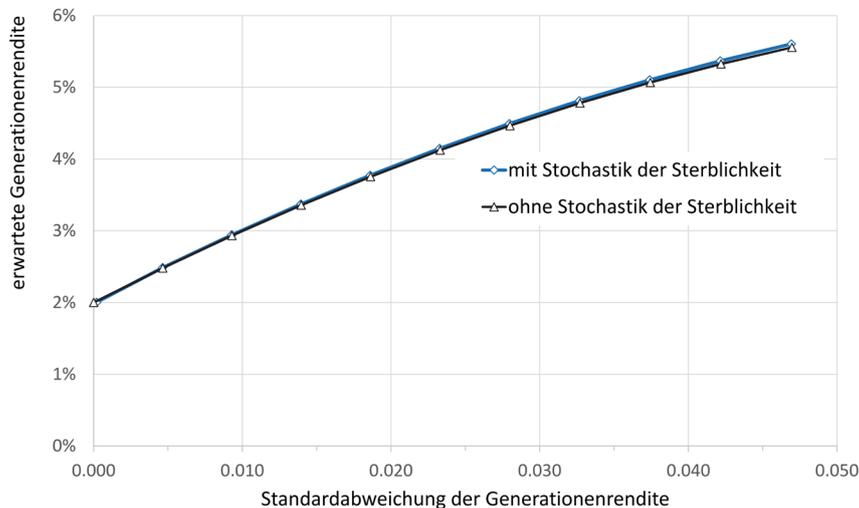


ABBILDUNG 25: Rendite-Risiko-Profil: Mittlere Generationenrendite in Abhängigkeit von der Standardabw. der Generationenrendite; mit und ohne stochastischer Sterblichkeitsentwicklung ($\sigma_\alpha = 0$ bzw. $\sigma_\alpha = 0.04$); jeweils 10 000 Simulationen.

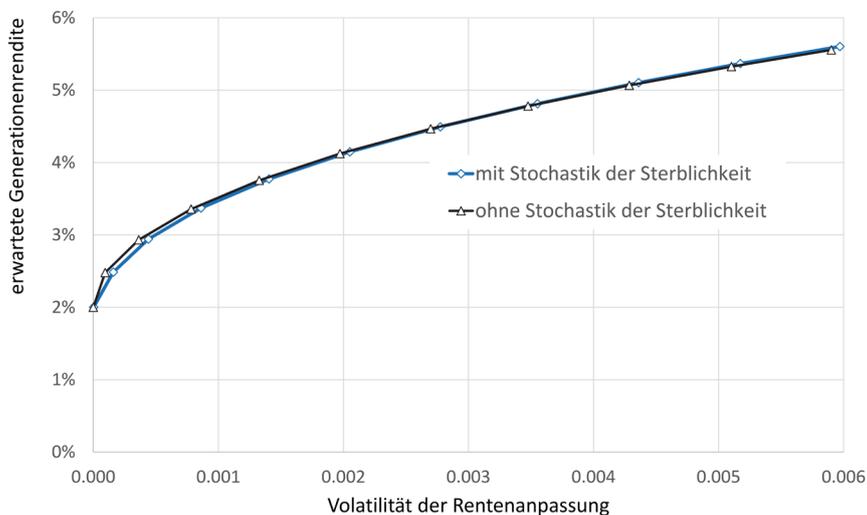


ABBILDUNG 26: Rendite-Risiko-Profil: Mittlere Generationenrendite in Abhängigkeit von der Volatilität der Rentenanpassung; mit und ohne stochastischer Sterblichkeitsentwicklung ($\sigma_\alpha = 0$ bzw. $\sigma_\alpha = 0.04$); jeweils 10 000 Simulationen.

Bemerkungen

1. Es fällt auf, dass die Mittelwerte der beobachteten Generationenrenditen systematisch größer sind als die erwarteten Portfoliorenditen. So beträgt die *erwartete Portfoliorendite* für eine Risikoexposition von $\sigma = 0.2$ $\mu_P = \bar{\mu} + \sigma r_M - \frac{1}{2}\sigma^2 = 5.00\%$, während wir eine mittlere Generationenrendite von $\mu_{(g)} = 5.56\%$ beobachten. Um dies zu verstehen betrachten wir das Modell ohne stochastische Sterblichkeit, also $\sigma_\alpha = 0$. Setzen wir dann $A_k := {}_k p_z(t_0, t_0) e^{-k\mu}$ für $k = 0, 1, \dots, \omega - z$, so ist die Generationenrendite die implizit definierte Zufallsvariable $\mu_{(g)}$, für die gilt:

$$\sum_{k=0}^{\omega-z} A_k = \sum_{k=0}^{\omega-z} A_k \exp(\sigma W_k - k(\mu_{(g)} - \mu_P)). \quad (\text{Gl. 38})$$

Das zeitstetige Analagon zu (Gl. 35) kann man wie folgt beschreiben: Für eine nicht-negative stetige Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sei $X = X(\sigma, T)$ die (eindeutig bestimmte) Zufallsvariable, für die gilt:

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T f(t) \exp(\sigma W_t - X_T t) dt. \quad (\text{Gl. 39})$$

Selbst im einfachsten Fall $f(t) \equiv 1$ waren wir nicht in der Lage den Erwartungswert der Zufallsvariable X zu bestimmen. Da $\left(\exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\right)_{t \geq 0}$ ein Martingal ist mit $\mathbf{E}\left(\exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\right) = 1$, liegt es nahe $\mathbf{E}(X(\sigma, T)) \approx \text{const} \cdot \sigma^2$ zu schätzen. Monte Carlo-Simulationen zeigen, dass $\mathbf{E}(X(\sigma, 1)) \approx 0.11 \sigma^2$. Aus der Skalierungseigenschaft des Wiener-Prozesses folgt $\mathbf{E}(X(\sigma, T)) = \frac{1}{T} \mathbf{E}(X(\sigma\sqrt{T}, 1))$. Aus $\mathbf{E}(X(\sigma, 1)) = c \sigma^2$ für ein $c > 0$ folgt somit $\mathbf{E}(X(\sigma, T)) = \mathbf{E}(X(\sigma, 1))$ (Zeitinvarianz); umgekehrt folgt aus der Zeitinvarianz dass $\mathbf{E}(X(\sigma, 1)) = c \sigma^2$ für ein $c > 0$.

2. Führend wir die Berechnungen ohne Sterblichkeitstrend (Variante 0), so ergeben sich keine erkennbaren Unterschiede zu den in den Tabellen 3 und 4 dargestellten Ergebnissen. Wenn ein Sterblichkeitstrend unterstellt wird, so ist zwar die anfängliche Einmalprämie der Rentnergeneration höher, allerdings erhält die entsprechende Generation aufgrund der höheren Lebenserwartung auch insgesamt höhere Leistungen.

Literatur

[**Borodin/ Salminen 2002**] Borodin, Andrei N., Salminen, Paavo: *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*, 2. Auflage, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 2002.

[**Cairns e.a. 2006**] Cairns, A. J. G., D. Blake and K. Dowd: *A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration*, The Journal of Risk and Insurance, 73, (2006), 687-718.

[**Cairns e.a. 2009**] Cairns, A. J. G., D. Blake, K. Dowd, G. D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong and I. Balevich: *A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England & Wales and the United States*, North American Actuarial Journal, 13, (2009), 1-35.

[**Cairns e.a. 2011**] Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. *Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models*. Insurance: Mathematics and Economics 48(2011), 355-367.

[**Cairns 2013**] Cairns, A.J.G., *Modelling and Management of Longevity Risk*, Pension Research Council Working Paper, PRC WP2013-19.
DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2337154> (Download 04.02.2014)

[**Farniy 2011**] Farniy, Dieter: *Versicherungsbetriebslehre*, 5. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 2011.

[**Goecke 2011**] Goecke, Oskar: *Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich*; Institut für Versicherungswesen. Forschungsstelle FaRis. Working Paper 01/2011.
DOI: <http://opus.bsz-bw.de/fhk/volltexte/2012/3/>.

[**Goecke 2012**] Goecke, Oskar: *Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Simulationsrechnungen*; Institut für Versicherungswesen. Forschungsstelle FaRis. Working Paper 05/2012. DOI: <http://opus.bsz-bw.de/fhk/volltexte/2012/12/>.

[**Goecke 2013a**] Goecke, Oskar: *Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Backtesting*; Institut für Versicherungswesen. Forschungsstelle FaRis. Working Paper 07/2013. DOI: <http://opus.bsz-bw.de/fhk/volltexte/2013/42/>.

[**Goecke 2013b**] Goecke, Oskar: *Pension saving schemes with return smoothing mechanism*; Insurance: Mathematics and Economics 53 (2013), S. 678-689.

[**Heubeck e.a. 2006**] Heubeck, Klaus; Herrmann, Richard; D'Souza, Gabriele: *Die Richttafeln 2005 G – Modell, Herleitung, Formeln*, Blätter der DGVM, Band XXVII, Heft 3, April 2006, S. 473-517.

[**Human Mortality Database**] *Human Mortality Database*. University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at www.mortality.org or www.humanmortality.de (Download 06.02.2014).

[**Jamshidian 2004**] Jamshidian, F.: *Valuation of credit default swaps and swaptions*, Finance and Stochastics 8 (2004), pp. 343-371.

[**Karatzas/ Shreve 1991**] Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, New York- Berlin- Heidelberg 1991.

[**McKeever 2010**] McKeever, Kent: *A Short History of Tontines*, Fordham Journal of Corporate & Financial Law, Vol XV (2010), pp. 491-521.

[**OECD 2013**] OECD (Hrsg), *Pension at a Glance 2013: OECD and G20 Indicators*, OECD Publishing, Paris. DOI: http://dx.doi.org/10.1787/pension_glance-2013-en.

[**OECD 2014**] OECD (Hrsg), *OECD Pensions Outlook 2014*, OECD Publishing, Paris. DOI: <http://dx.doi.org/10.1787/9789264222687-en>.

[**Plat 2009**] Plat, Richard: *On stochastic mortality modeling*, Insurance: Mathematics and Economics 45 (2009), 393-404.

[**Schrager 2006**] Schrager, David F.: *Affine stochastic mortality*, Insurance: Mathematics and Economics 38 (2006), pp. 81-97 ()

[**Takáts 2010**] Takáts, Elöd: Ageing and asset prices, Bank for International Settlement Working Paper No 318, August 2010, DOI: <http://ssrn.com/abstract=1672638>.

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

ABBILDUNG 1: STILISIERTE BILANZ DES PENSIONS FONDS	4
ABBILDUNG 2: <i>CBD-MODELL</i> , $\text{LOGIT}(Q_x)$ FÜR DIE BASISSTAFEL DER RICHTTAFEL HEUBECK 2005G UND DIE PROJIZIERTE PERIODENTAFEL 2055 (RENTENBESTAND, ALTER 65-114) FÜR MÄNNER (RECHTS) UND FRAUEN, SOWIE JEWEILS DIE LINEAREN APPROXIMATIONEN.	10
ABBILDUNG 3: PARAMETER $\kappa_1'(t)$, $\kappa_2'(t)$ FÜR $t \in \{0, 1, \dots, 50\}$, $T=0$ ENTSPRICHT DABEI DEM BASISJAHR 2005, $T=50$ ENTSPRICHT DEM PROJEKTIONSJAHR 2055.	12
ABBILDUNG 4: VERGLEICH DER PERIODENSTERBETAFELN HEUBECK 2005G UND <i>CBD-MODELL</i> FÜR DAS BASISJAHR 2005 UND FÜR DAS PROJEKTIONSJAHR 2055, JEWEILS FÜR MÄNNER UND FRAUEN.	13
ABBILDUNG 5: MITTLEREN FERNEREN LEBENSERWARTUNG 65-JÄHRIGER MÄNNER (LINKS) BZW. FRAUEN (RECHTS) IN ABHÄNGIGKEIT VOM GEBURTSJAHR, VERGLEICH <i>CBD-MODELL</i> UND RICHTTAFELN 2005G, SOWIE DIE 1% UND 99%-QUANTILE FÜR DAS <i>CBD-MODELL</i> ($\sigma_\alpha = 0.04$).	18
ABBILDUNG 6: STRUKTUR DES ANFANGSBESTANDES <i>BESTANDXL</i>	19
ABBILDUNG 7: SIMULATION DER BESTANDSENTWICKLUNG (EINSCHL. NEUZUGANG) FÜR 60 JAHRE FÜR EINEN GROßEN, MITTLEREN UND KLEINEN BESTAND BEI VERSCHIEDENEN σ_α -NIVEAUS. DIE GEBROCHENE LINIE ZEIGT JEWEILS DIE DETERMINISTISCHE HOCHRECHNUNG DES BESTANDES, WENN MAN DIE RECHNUNGSGRUNDLAGEN DER RICHTTAFELN 2005G ZUGRUNDE LEGT.	21
ABBILDUNG 8: ENTWICKLUNG DES NEUZUGANGS FÜR DIE <i>SZENARIEN 0-4</i> .	36
ABBILDUNG 9: ENTWICKLUNG GESAMTZAHL DER RENTNER FÜR DIE <i>SZENARIEN 0-4</i> UND DIE <i>VARIANTE 0</i> UND <i>1</i> BEI DETERMINISTISCHER STERBLICHKEITSENTWICKLUNG ($\sigma_\alpha = 0$).	37
ABBILDUNG 10: ENTWICKLUNG DER STRUKTURPARAMETER v_t , λ_t , ξ_t FÜR $T = 1, \dots, T$ FÜR TRENDUNABHÄNGIGE (<i>VARIANTE 0</i> : LINKS) UND TRENDABHÄNGIGE ÜBERLEBENSWAHRSCHEINLICHKEITEN (<i>VARIANTE 1</i> : RECHTS) FÜR DIE <i>SZENARIEN 0-4</i> IM DETERMINISTISCHEN MODELL ($\sigma_\alpha = 0$).	38
ABBILDUNG 11: ENTWICKLUNG VON θ_t FÜR $T = 0, \dots, T-1$ FÜR DIE <i>SZENARIEN 0-4</i> FÜR TRENDUNABHÄNGIGE (<i>VARIANTE 0</i> : OBEN) UND TRENDABHÄNGIGE ÜBERLEBENSWAHRSCHEINLICHKEITEN (<i>VARIANTE 1</i> : UNTEN); HIERBEI WURDE $\rho_{\text{Ziel}} = 0.2$ UND $f = \exp(\rho_{\text{Ziel}})$ UNTERSTELLT.	39
ABBILDUNG 12: ENTWICKLUNG DER GENERATIONENRENDITE IM PENSIONS FONDS (KOLLEKTIVES MODELL) IM DETERMINISTISCHEN FALL FÜR DIE <i>SZENARIEN 0-4</i> FÜR TRENDUNABHÄNGIGE (<i>VARIANTE 0</i> : OBEN) UND TRENDABHÄNGIGE ÜBERLEBENSWAHRSCHEINLICHKEITEN (<i>VARIANTE 1</i> : UNTEN); HIERBEI WURDE $\mu_p = \mu = 0.02$, $\rho_{\text{Ziel}} = 0.2$ UND $f = \exp(\rho_{\text{Ziel}})$ UNTERSTELLT.	42

- ABBILDUNG 13: BESTANDENTWICKLUNG (GESAMTZAHL DER RENTNER):** DARGESTELLT SIND DIE 1%, 5%, 10%, 50%, 90%, 95% UND 99%-QUANTILE FÜR 60 JAHRE BEI GLEICHBLEIBENDEM NEUZUGANG (SZENARIO 0) FÜR TRENDUNABHÄNGIGE (VARIANTE 0: LINKS) UND TRENDABHÄNGIGE ÜBERLEBENSWAHRSCHEINLICHKEITEN (VARIANTE 1: RECHTS) BEZOGEN AUF DEN ANFANGSBESTAND *BESTAND XL*. DIE BERECHNUNGEN ERFOLGTE AUF GRUNDLAGE VON 10 000 SIMLATIONSBLÄUFEN MIT $\sigma_\alpha = 0.04$. 44
- ABBILDUNG 14: ERFORDERLICHE RESERVEQUOTE $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ IN ABHÄNGIGKEIT VON** DER ANPASSUNGSGESCHWINDIGKEIT α BEI EINEM SICHERHEITSNIVEAU VON 0.5%, 1% BZW. 5% IM BASISZENARIO (SZENARIO 0/ VARIANTE 1). DEN BERECHNUNGEN ERFOLGEN AUF GRUNDLAGE VON 50 000 SIMLATIONSBLÄUFEN. 45
- ABBILDUNG 15: STANDARDABWEICHUNG DER RENTENANPASSUNGEN IN ABHÄNGIGKEIT** VON DER ANPASSUNGSGESCHWINDIGKEIT α FÜR VERSCHIEDENE RESERVENIVEAUS $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ BEI TRENDABHÄNGIGEN ÜBERLEBENSWAHRSCHEINLICHKEITEN (VARIANTE 1). BERECHNUNG ERFOLGTE AUF GRUNDLAGE VON 10 000 SIMLATIONSBLÄUFEN. 46
- ABBILDUNG 16: ERFORDERLICHE RESERVEQUOTE $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ IN ABHÄNGIGKEIT VON** DER ANPASSUNGSGESCHWINDIGKEIT α BEI EINEM SICHERHEITSNIVEAU VON 0.5%, 1% BZW. 5% FÜR $\sigma_{Ziel} \in \{0.02, 0.05, 0.08\}$. BERECHNUNG ERFOLGT AUF GRUNDLAGE VON JEWEILS 50 000 SIMLATIONSBLÄUFEN. SIEHE AUCH TABELLE 6. 51
- ABBILDUNG 17: VERGLEICH DER MITTLEREN GENERATIONENRENDITEN FÜR DAS** TONTINEMODELL UND DEN PENSIONSFONDS IN ABHÄNGIGKEIT VON DER RISIKOEXPOSITION. FÜR DEN RENTENFONDS WURDE $\rho_{Ziel} = 0.2$ UND $\alpha = 0.20$ bzw. $\alpha = 0.15$ UNTERSTELLT. 55
- ABBILDUNG 18: VERGLEICH DER VOLATILITÄT DER RENTENANPASSUNGEN FÜR DAS** TONTINEMODELL UND DEM PENSIONSFONDS IN ABHÄNGIGKEIT VON DER RISIKOEXPOSITION. FÜR DEN RENTENFONDS WURDE $\rho_{Ziel} = 0.2$ UND $\alpha = 0.20$ bzw. $\alpha = 0.15$ UNTERSTELLT. 56
- ABBILDUNG 19: WAHRSCHEINLICHKEIT EINER RENTENKÜRZUNG, EINER RENTENKÜRZUNG** UM MEHR ALS 2% BZW. UM MEHR ALS 4% IN ABHÄNGIGKEIT VON DER RISIKOEXPOSITION. FÜR DEN PENSIONSFONDS WURDE $\rho_{Ziel} = 0.2$ UND $\alpha = 0.20$ BZW. $\alpha = 0.15$ UNTERSTELLT. 57
- ABBILDUNG 20: RENDITE-RISIKO PROFILE 1. DURCHSCHNITTLICHE** GENERATIONENRENDITE IN RELATION ZUR STANDARDABWEICHUNG DER GENERATIONENRENDITE. 58
- ABBILDUNG 21: RENDITE-RISIKO PROFILE 2. DURCHSCHNITTLICHE** GENERATIONENRENDITE IN RELATION ZUR VOLATILITÄT DER RENTENANPASSUNGEN. 59
- ABBILDUNG 22: STANDARDABWEICHUNG DER 1-JÄHRIGEN** BESTANDSÜBERLEBENSWAHRSCHEINLICHKEIT IN ABHÄNGIGKEIT VON DER

BESTANDGRÖÙE FÜR $\sigma_\alpha = 0, \sigma_\alpha = 4\%, \sigma_\alpha = 8\%$: VERGLEICH DER APPROXIMATION NACH (GL. 35) UND DER MONTE CARLO SIMULATION.	64
ABBILDUNG 23: SICHERHEITABSCHLÄGE AUF DIE STERBEWAHRSCHEINLICHKEITEN FÜR DIE ALTER $x = 65 - 115$ DER PERIODENTAFEL FÜR $T = 0$ UND $T = 10$, HYBRIDER BESTAND, SICHERHEITSNIVEAU $1 - \delta = 95\%$ BZW. $1 - \delta = 90\%$, $T=60$, $\sigma_\alpha = 0.04$	67
ABBILDUNG 24: DIE STANDARDABWEICHUNG DER GENERATIONENRENDITE UND DIE VOLATILITÄT DER RENTENANPASSUNG IN ABHÄNGIGKEIT VON DER RISIKOEXPOSITION DER KAPITALANLAGEN; STOCHASTISCHER STERBLICHKEITSENTWICKLUNG ($\sigma_\alpha = 0.04$); JEWEILS 10 000 SIMULATIONEN.	79
ABBILDUNG 25: RENDITE-RISIKO-PROFIL: MITTLERE GENERATIONENRENDITE IN ABHÄNGIGKEIT VON DER STANDARDABW. DER GENERATIONENRENDITE; MIT UND OHNE STOCHASTISCHER STERBLICHKEITSENTWICKLUNG ($\sigma_\alpha = 0$ BZW. $\sigma_\alpha = 0.04$); JEWEILS 10 000 SIMULATIONEN.	80
ABBILDUNG 26: RENDITE-RISIKO-PROFIL: MITTLERE GENERATIONENRENDITE IN ABHÄNGIGKEIT VON DER VOLATILITÄT DER RENTENANPASSUNG; MIT UND OHNE STOCHASTISCHER STERBLICHKEITSENTWICKLUNG ($\sigma_\alpha = 0$ BZW. $\sigma_\alpha = 0.04$); JEWEILS 10 000 SIMULATIONEN.	80
TABELLE 1: ÜBERSICHT DER PARAMETER FÜR DAS CBD-MODELL BEI EINER KALIBRIERUNG AUF DER GRUNDLAGEN DER PERIODENTAFELN 2005- 2055 DER RICHTTAFELN HEUBECK 2005G.	13
TABELLE 2: RENTENANPASSUNG IM STEADY-STATE-BESTAND, VARIANTE 0, SZENARIO 0: VERGLEICH DER GENERATIONENRENDITEN IM INDIVIDUELLEN MODELL ($\mu_G = \mu_P$) UND IM KOLLEKTIVEN MODELL ($\hat{\mu}_G = \mu_P + \theta_0 - \hat{\varepsilon}(\rho_{Ziel})$).	43
TABELLE 3: ERFORDERLICHE RESERVEQUOTE $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ IN ABHÄNGIGKEIT VON DER ANPASSUNGSGESCHWINDIGKEIT α BEI EINEM SICHERHEITSNIVEAU VON 0.5%, 1% BZW. 5% BEI GLEICHBLEIBENDEM NEUZUGANG (SZENARIO 0) FÜR DIE VARIANTEN 0 UND 1.	45
TABELLE 4: PARAMETER DER VERTEILUNG DER X_T - PFADE FÜR VARIANTE 1, $\sigma_{Ziel} = 0.05$ UND VERSCHIEDENDE (α, ρ_{Ziel}) -KOMBINATIONEN. AUSGEWERTET WURDEN JEWEILS 50 000 SIMULATIONSLÄUFE.	48
TABELLE 5: SCHÄTZUNG DER ERFORDERLICHE RESERVEQUOTE $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ IN ABHÄNGIGKEIT VON DER ANPASSUNGSGESCHWINDIGKEIT α , SO DASS $m_0(\alpha, \rho_{Ziel}, \sigma_{Ziel}) = 0.5\%$ BZW. 1% BZW. 5% FÜR $\sigma_{Ziel} \in \{0.02, 0.05, 0.08\}$; ES WURDE DAS BASISSENARIO (VARIANTE1 / SZENARIO0) ZUGRUNDE GELEGT. SIEHE AUCH ABBILDUNG 16.	49

TABELLE 6: WAHRSCHEINLICHKEIT EINER UNTERDECKUNG IN ABHÄNGIGKEIT VON DER ANPASSUNGSGESCHWINDIGKEIT α BEI EINER ZIELRESERVEQUOTE VON $\rho_{Ziel} = \rho(0) = 20\%$ BZW. 30% . ES WURDE DAS *BASISSZENARIO* ZUGRUNDE GELEGT, BERECHNUNGEN BASIEREN AUF 50 000 SIMULATIONSLÄUFEN - 0.002% ENTSpricht ALSO 1 BEOBACHTUNG. 52

TABELLE 7: STANDARDABWEICHUNG DER 1-JÄHRIGEN BESTANDSÜBERLEBENSWAHRSCHEINLICHKEIT IN ABHÄNGIGKEIT VON DER BESTANDSGRÖÖE FÜR $\sigma_\alpha = 0, 4\%$ UND 8% : VERGLEICH DER APPROXIMATION NACH (GL. 35) UND SCHÄTZUNGEN VON MONTE CARLO SIMULATIONEN. 65

TABELLE 8: AUSWERTUNG ZUM RISIKO-RENDITE-PROFIL DER GENERATIONENRENDITE OHNE STOCHASTISCHER STERBLICHKEITSENTWICKLUNG ($\sigma_\alpha = 0$); JEWEILS 50 000 SIMULATIONEN. 78

TABELLE 9: AUSWERTUNG ZUM RISIKO-RENDITE-PROFIL DER GENERATIONENRENDITE MIT STOCHASTISCHER STERBLICHKEITSENTWICKLUNG ($\sigma_\alpha = 0.04$); JEWEILS 50 000 SIMULATIONEN. 79

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am IVW Köln“. Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder [hier](#) abgerufen werden.

Forschung am IVW Köln, 9/2015

Goecke: Asset Liability Management in einem selbstfinanzierenden Pensionsfonds

Köln, Mai 2015

ISSN (online) 2192-8479

Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:

Prof. Dr. Lutz Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web www.ivw-koeln.de

Schriftleitung / editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277

Mail juergen.strobel@fh-koeln.de

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Herausgeber der Publikation / Editor:

Prof. Dr. Oskar Goecke
Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3278
Fax +49 221 8275-3277

Mail oskar.goecke@fh-koeln.de

Zuletzt erschienen im Rahmen von „Forschung am IVW Köln“

2015

- Strobel (Hrsg.): Management des Langlebigkeitsrisikos. Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium am 5.12.2014 in Köln, Nr. 8/2015
- Völler, Wunder: Enterprise 2.0: Konzeption eines Wikis im Sinne des prozessorientierten Wissensmanagements, Nr. 7/2015
- Heep-Altiner, Rohlf: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“, Nr. 6/2015
- Knobloch: Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen, Nr. 5/2015
- Heep-Altiner, Rohlf, Beier: Erneuerbare Energien und ALM eines Versicherungsunternehmens, Nr. 4/2015
- Dolgov: Calibration of Heston's stochastic volatility model to an empirical density using a genetic algorithm, Nr. 3/2015
- Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen, Nr. 2/2015
- Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2014, Nr. 1/2015

2014

- Müller-Peters, Völler (beide Hrsg.): Innovation in der Versicherungswirtschaft, Nr. 10/2014
- Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert, Nr. 9/2014
- Heep-Altiner, Münchow, Scuzzarello: Ausgleichsrechnungen mit Gauß Markow Modellen am Beispiel eines fiktiven Stornobestandes, Nr. 8/2014
- Grundhöfer, Röttger, Scherer: Wozu noch Papier? Einstellungen von Studierenden zu E-Books, Nr. 7/2014
- Heep-Altiner, Berg (beide Hrsg.): Katastrophenmodellierung - Naturkatastrophen, Man Made Risiken, Epidemien und mehr. Proceedings zum 6. FaRis & DAV Symposium am 13.06.2014 in Köln, Nr. 6/2014
- Goecke (Hrsg.): Modell und Wirklichkeit. Proceedings zum 5. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2013 in Köln, Nr. 5/2014
- Heep-Altiner, Hoos, Krahforst: Fair Value Bewertung von zedierten Reserven, Nr. 4/2014
- Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung, Nr. 3/2014
- Zimmermann: Frauen im Versicherungsvertrieb. Was sagen die Privatkunden dazu?, Nr. 2/2014
- Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2013, Nr. 1/2014