

**Forschung am IVW Köln, 8/2015**

Institut für Versicherungswesen



# **Management des Langlebigkeitsrisikos**

**Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium  
am 5.12.2014 in Köln**

**Jürgen Strobel (Hrsg.)**



**Jürgen Strobel**  
**Forschungsstelle FaRis**

## **Management des Langlebigkeitsrisikos. Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium am 5.12.2014 in Köln**

---

### **Zusammenfassung**

Die säkulare Sterblichkeitsverbesserung stellt seit langem alle Alterssicherungssysteme vor große Herausforderungen. Nicht zuletzt die Lebensversicherungswirtschaft als klassischer Anbieter von privaten Rentenversicherungen ist davon betroffen. Eine Analyse der Sterblichkeitsentwicklung kann unter ganz unterschiedlichen Blickwinkeln durchgeführt werden; einige wichtige Aspekte wurden beim 7. FaRis & DAV-Symposium vertieft behandelt.

### **Abstract**

The improvement of the mortality is one of the biggest challenges for pension systems. Especially, life insurance as the classical supplier of private annuities is affected by this aspect. An analysis of the development of mortality can be proceeded on the base of different perspectives – some of these have been treated intensively at the 7th FaRis & DAV Symposium.

### **Schlagwörter**

Langlebigkeitsrisiko, Langfristiger und kurzfristiger Sterblichkeitstrend, stochastische Projektionsmodelle, Lee-Carter-Modell, Methode von Heligman-Pollard, Cairns-Blake-Dowd Modell, Transfer von Langlebigkeit in Versicherungsmärkte, Transfer von Langlebigkeit in Kapitalmärkte, Longevity Swaps

## Vorwort

Die säkulare Sterblichkeitsverbesserung stellt seit langem alle Alterssicherungssysteme vor große Herausforderungen. Nicht zuletzt die Lebensversicherungswirtschaft als klassischer Anbieter von privaten Rentenversicherungen ist davon betroffen. Eine Analyse der Sterblichkeitsentwicklung kann unter ganz unterschiedlichen Blickwinkeln durchgeführt werden; einige wichtige Aspekte sind beim 7. FaRis & DAV-Symposium vertieft behandelt worden.

Zum einen geht es darum, die Sterblichkeitsentwicklung mathematisch zu modellieren. Besondere Bedeutung haben stochastische Projektionsmodelle für die Bevölkerungsterblichkeit gewonnen, die den langfristigen Sterblichkeitstrend quantifizieren. In jüngerer Zeit kommen solche Modelle vermehrt im aktuariellen Alltag zum Einsatz, wenn es darum geht, nicht nur eine Best-Estimate-Annahme über die zukünftige Sterblichkeit, sondern auch Aussagen über die Verteilung möglicher Versorgungs- oder Versicherungsleistungen zu treffen und so beispielsweise Sicherheitszuschläge und Solvenzkapital mit Blick auf Solvency II risikoadäquat zu berechnen.

Eine wichtige Rolle spielen auch die Interdependenzen zwischen der Entwicklung der Langlebigkeit und dem Zinsniveau. Dazu wird untersucht, wie ein angemessenes Asset/Liability-Management in einem sich selbst finanzierenden Rentenbestand aussehen könnte. Die Ergebnisse sind auch für die betriebliche Altersversorgung von Interesse.

Schließlich bleibt für den im Unternehmen verantwortlichen Praktiker die wichtige Aufgabe, die Sterblichkeitsrisiken zu managen, die bei aller Sorgfalt der Modellierung unvermeidlich verbleiben. Hier sind Rückversicherungslösungen genauso zu nennen wie Absicherungen über den Kapitalmarkt. Auch diese Thematik ist beim im Symposium aufgegriffen worden.

Köln, April 2015

Jürgen Strobel

# Autorenverzeichnis

---

1. Das Langlebigkeitsrisiko als versicherungstechnisches Risiko Jürgen Strobel

---

2. Die Sterberaten der Zukunft Kai Kaufhold  
Stochastische Modellierung von Sterberaten für das Solvency II – SCR des  
Langlebigkeitsrisikos

---

3. Kollektiver Risikoausgleich in einem Rentenbestand Oskar Goecke

---

4. Langlebigkeit Quo Vadis? Cord-Roland Rinke  
Transfer von Langlebigkeit in Versicherungs- und Kapitalmärkte

---

# Inhaltsverzeichnis

|   |     |
|---|-----|
| VORWORT.....  | III |
| AUTORENVERZEICHNIS.....   | IV  |
| ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....  | VII |
| TABELLENVERZEICHNIS.....  | IX  |
| ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS.....  | X   |
| 1 DAS LANGLEBIGKEITSRISIKO ALS VERSICHERUNGSTECHNISCHES RISIKO.....                                       | 1   |
| 1.1 KOMPONENTEN DES LANGLEBIGKEITSRISIKOS.....  | 1   |
| 1.2 AUSGEWÄHLTE MODELLE ZU DER STERBLICHKEITSENTWICKLUNG IM ÜBERBLICK.....                                | 6   |
| 1.3 LITERATURHINWEISE.....  | 10  |
| 2 DIE STERBERATEN DER ZUKUNFT.....  | 11  |
| 2.1 EINFÜHRUNG UND DEFINITIONEN.....  | 11  |
| 2.2 WAS IST TRENDRISIKO BEI STERBERATEN?.....   | 15  |
| 2.3 MODELLBEISPIELE: LEE-CARTER, CAIRNS-BLAKE-DOWD.....   | 16  |
| 2.3.1 <i>Lee-Carter-artige Modelle</i> .....  | 17  |
| 2.3.2 <i>Cairns-Blake-Dowd Modelle</i> .....  | 20  |
| 2.3.3 <i>Projektion der zeitabhängigen Parameter</i> .....  | 25  |
| 2.4 STATISTISCHE MODELLIERUNG DES VALUE-AT-RISK.....  | 26  |
| 2.4.1 <i>Value-at-Risk-Methode</i> .....  | 27  |
| 2.5 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK.....   | 29  |
| 2.6 LITERATURHINWEISE.....  | 30  |
| 3 KOLLEKTIVER RISIKOAUSGLEICH IN EINEM RENTENBESTAND.....   | 31  |
| 3.1 EINLEITUNG.....   | 31  |
| 3.2 MODELLBESCHREIBUNG.....   | 32  |
| 3.2.1 <i>Das Sterblichkeitsmodell</i> .....   | 33  |
| 3.2.2 <i>Das Kapitalmarktmodell</i> .....   | 40  |
| 3.2.3 <i>Darstellung der Asset-Liability Strategie</i> .....  | 40  |
| 3.3 SIMULATIONSRECHNUNGEN.....  | 43  |
| 3.3.1 <i>Spezialfall: Risikolose Kapitalanlage (<math>\sigma_{Ziel} = 0</math>)</i> .....                 | 44  |
| 3.3.2 <i>Der allgemeine Fall: Risikobehaftete Kapitalanlage (<math>\sigma_{Ziel} &gt; 0</math>)</i> ..... | 45  |
| 3.4 RESÜMEE.....  | 46  |

|     |                                    |    |
|-----|------------------------------------|----|
| 4   | LANGLEBIGKEIT, QUO VADIS? .....    | 48 |
| 4.1 | EINLEITUNG.....                    | 48 |
| 4.2 | LANGLEBIGKEITSRISIKEN.....         | 49 |
| 4.3 | STERBLICHKEITSVERBESSERUNGEN ..... | 51 |
| 4.4 | LONGEVITY SWAP .....               | 54 |
| 4.5 | DERIVATE .....                     | 56 |
| 4.6 | WRAP UP .....                      | 59 |

## Abbildungsverzeichnis

|   |    |
|---|----|
| Abbildung 1: Lebenserwartung von Neugeborenen .....   | 2  |
| Abbildung 2: Lebenserwartung von 65 – jährigen Männern und Frauen.....  | 2  |
| Abbildung 3: Entwicklung der Sterblichkeit im Zeitablauf für ausgewählte Alter.....   | 3  |
| Abbildung 4: Entwicklung der Sterblichkeit im Zeitablauf für die Alter 30 und 60 in vergrößertem Maßstab .....  | 3  |
| Abbildung 5: Logarithmische Sterbeziffer $ln(mx, t)$ für westdeutsche Männer.....   | 12 |
| Abbildung 6: Sterbeziffer $mx, t$ gegen Zeit .....  | 13 |
| Abbildung 7: Sterblichkeitsverbesserungsraten für 70-jährige Männer.....  | 14 |
| Abbildung 8: Sterbeziffer $mx, t$ für 70-jährige Männer .....   | 14 |
| Abbildung 9: Sterblichkeitsverbesserungsraten im gleitenden 9-Jahres-Mittel gegen Zeit (horizontal) und Alter (vertikal).....   | 15 |
| Abbildung 10: Parameterschätzungen für M1 (Lee-Carter).....   | 18 |
| Abbildung 11: Residuen (Vorzeichen) des Lee-Carter-Modells .....  | 19 |
| Abbildung 12: Parameterschätzungen M5 (CBD-Modell) .....  | 20 |
| Abbildung 13: Residuen (Vorzeichen) des Cairns Blake Dowd-Modells .....   | 21 |
| Abbildung 14: Parameterschätzungen für M6 (CBD mit Cohort Effect).....  | 22 |
| Abbildung 15: Residuen (Vorzeichen) des Modells M6 (CBD mit Cohort Effect) .....  | 24 |
| Abbildung 16: Projektion der Sterberaten $m_{x,t}$ für Alter $x=70$ mit 99,5% Konfidenz-Intervall .....   | 26 |
| Abbildung 17: Schematische Darstellung des Datenbestands .....  | 28 |
| Abbildung 18: Vergleich $SCR_{longevity}$ für verschiedene Berechnungsmethoden.....   | 29 |
| Abbildung 19: Vereinfachte Bilanz des Pensionsfonds.....  | 32 |
| Abbildung 20: Stochastische Faktoren und Steuerungsparameter des Modells .....  | 33 |
| Abbildung 21: $logit(1-p(x, t))$ für die Basistafel 2005 und Projektionstafel 2055 der Richttafeln 2005G für Frauen sowie die lineare Approximation im CBD-Modell .....               | 35 |
| Abbildung 22: $logit(1-p(x, t))$ für die Basistafel 2005 und Projektionstafel 2055 der Richttafeln 2005G für Männer sowie die lineare Approximation im CBD-Modell.....                | 35 |
| Abbildung 23: Vergleich der Periodentafeln für die Basistafel 2005 und Projektionstafel 2055 der Richttafeln 2005G für Frauen und Männer sowie die Approximationen im CBD-Modell..... | 36 |

|   |    |
|---|----|
| Abbildung 24: Mittlere fernere Lebenserwartung 65-jähriger Frauen in Abhängigkeit vom Geburtsjahr, Vergleich der Werte nach Richttafeln 2005G und des CBD-Modell (deterministisch und Quantile des stochastischen Modells).....           | 37 |
| Abbildung 25: Mittlere fernere Lebenserwartung 65-jähriger Männer in Abhängigkeit vom Geburtsjahr, Vergleich der Werte nach Richttafeln 2005G und des CBD-Modell (deterministisch und Quantile des stochastischen Modells).....           | 37 |
| Abbildung 26: Struktur des hybriden Musterbestandes (Bestand XL) für die Simulation .   | 38 |
| Abbildung 27: Simulation der Bestandsentwicklung.....   | 39 |
| Abbildung 28: 1% und 5%-Quantile für die Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit $\alpha$ und der erforderlichen Reservequote. Ausgewertet wurden jeweils 10 000 Simulationsläufe.....                   | 44 |
| Abbildung 29: Die Volatilität der Rentenanpassung in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit $\alpha$ .....  | 45 |
| Abbildung 30: 5%-Quantile für die Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit $\alpha$ und der erforderlichen Reservequote $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ . Ausgewertet wurden jeweils 1 000 Simulationsläufe ..... | 46 |
| Abbildung 31: Lebenserwartung und Rentenfaktoren (m/w) in GB .....  | 48 |
| Abbildung 32: Kapitalanlagen zur Bedeckung von Renten & Pensionen in Billionen USD  | 49 |
| Abbildung 33: Sterblichkeitsverbesserungen für männliche Amerikaner .....   | 51 |
| Abbildung 34: Alterskomponenten in D (West), USA und GB.....  | 52 |
| Abbildung 35: Periodenkomponenten in D (West), USA und GB.....  | 53 |
| Abbildung 36: Kohortenkomponenten in D (West), USA und GB .....   | 53 |
| Abbildung 37: Alle Komponenten in D (West), USA und GB .....  | 54 |
| Abbildung 38: Historischer & projizierter Trend für Männer in GB.....   | 54 |
| Abbildung 39: Cash Flow eines Longevity Swaps .....   | 55 |
| Abbildung 40: Buy-Out, Buy-In und Longevity Swaps in Milliarden GBP .....   | 56 |
| Abbildung 41: Vorgehensweise bei einem Mortality Forward .....  | 57 |
| Abbildung 42: Auszahlungsstruktur des Mortality Forwards.....   | 57 |

## **Tabellenverzeichnis**

|   |    |
|---|----|
| Tabelle 1: Die ältesten Menschen der Welt .....   | 1  |
| Tabelle 2: Übersicht der Parameter für das CBD-Modell bei einer Kalibrierung auf der Grundlagen der Periodentafeln 2005- 2055 der Richttafeln Heubeck 2005G ..... | 34 |
| Tabelle 3: Wichtige Risiken bei der Altersvorsorge .....  | 50 |
| Tabelle 4: Vor- und Nachteile von Rückversicherungslösungen und Derivaten.....  | 59 |

## Abkürzungsverzeichnis

|      |                                      |
|------|--------------------------------------|
| ALM  | Asset Liability Management           |
| APC  | Age-Period-Cohort                    |
| BIP  | Bruttoinlandsprodukt                 |
| DVA  | Deutsche Aktuarvereinigung e. V.     |
| EIB  | Europäische Investitionsbank         |
| EVU  | Erstversicherungsunternehmen         |
| LLMA | Life & Longevity Markets Association |
| OTC  | Over-the-counter                     |
| RVU  | Rückversicherungsunternehmen         |

# 1 Das Langlebigkeitsrisiko als versicherungstechnisches Risiko

Jürgen Strobel

## 1.1 Komponenten des Langlebigkeitsrisikos

Am 04. August 1997 starb Jeanne Calment im biblischen Alter von 122 Jahren und 164 Tagen und erreichte damit die bislang längste verbürgte Lebensdauer.<sup>1</sup> Aber es gibt auch andere Hochbetagte, von denen einige in der nachfolgenden Übersicht zusammengestellt sind. Dabei fällt auf, dass erst auf Platz elf der erste Mann erscheint, unter den 100 Menschen mit dem höchsten Lebensalter befinden sich lediglich sechs Männer, und die älteste Deutsche erscheint auf Platz 28.<sup>2</sup>

| Rang | Name            | m/w | Geburt | Tod  | Alter               | Herkunft           |
|------|-----------------|-----|--------|------|---------------------|--------------------|
| 1    | Jeanne Calment  | w   | 1875   | 1997 | 122 Jahre, 164 Tage | Frankreich         |
| 2    | Sarah Knauss    | w   | 1880   | 1999 | 119 Jahre, 97 Tage  | Vereinigte Staaten |
| 3    | Lucy Hannah     | w   | 1875   | 1993 | 117 Jahre, 248 Tage | Vereinigte Staaten |
| ...  | ...             | ... | ...    | ...  | ...                 | ...                |
| 10   | Besse Cooper    | w   | 1896   | 2012 | 116 Jahre, 100 Tage | Vereinigte Staaten |
| 11   | Jiroemon Kimura | m   | 1897   | 2013 | 116 Jahre, 54 Tage  | Japan              |

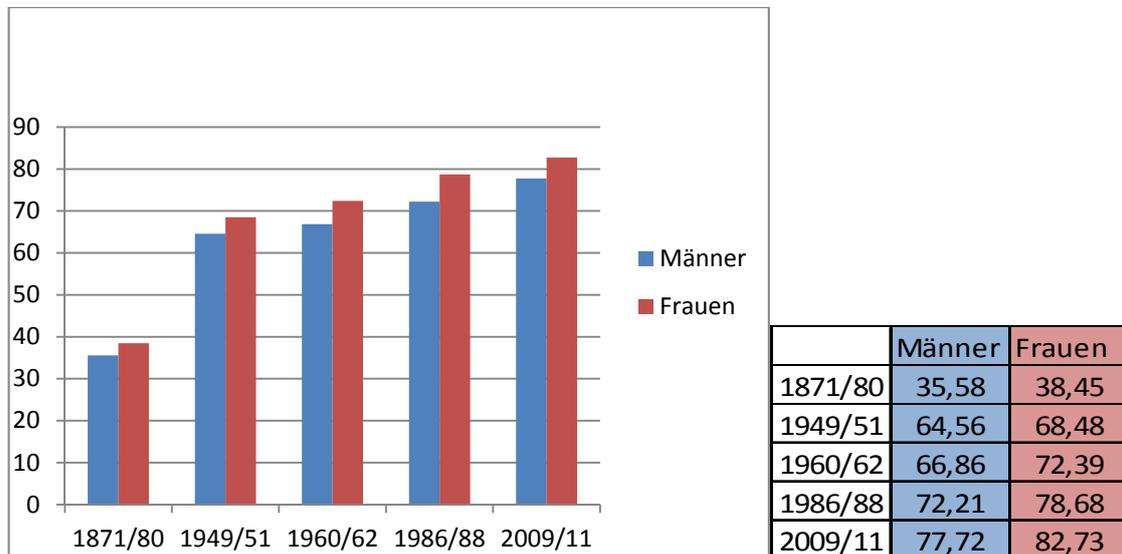
**Tabelle 1: Die ältesten Menschen der Welt**

Aber nicht so sehr einzelne Rekordhalter stellen die Alterssicherungssysteme vor große Herausforderungen, sondern vor allem die säkulare Sterblichkeitsverbesserung in allen Segmenten der Bevölkerung. Nicht nur die Lebensversicherung als klassischer Anbieter von privaten Rentenversicherungen ist davon betroffen, sondern auch alle Durchführungswege der betrieblichen Altersversorgung. Eine Analyse der Sterblichkeitsentwicklung ist daher unumgänglich.

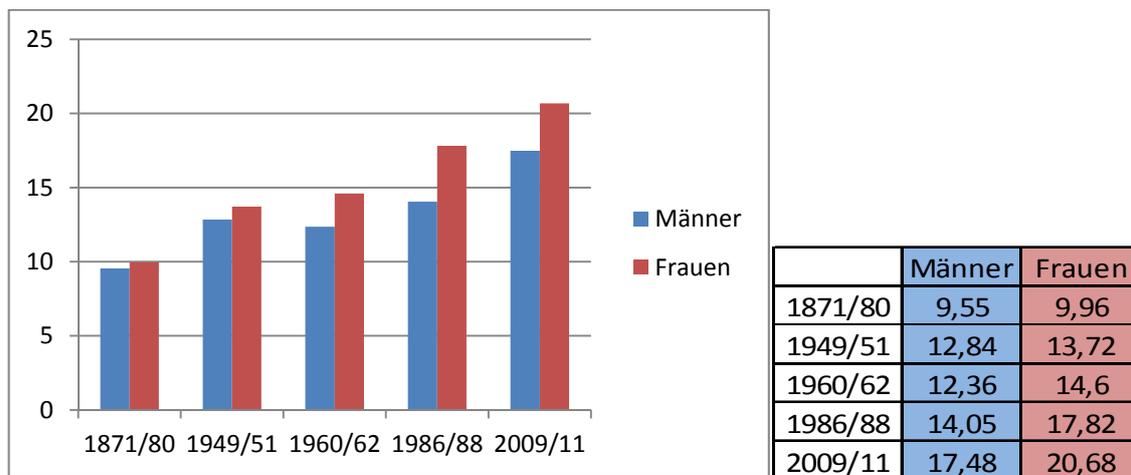
<sup>1</sup> Wikipedia, Liste der ältesten Menschen

<sup>2</sup> ebda.

Diese Analyse kann unter verschiedenen Gesichtspunkten vorgenommen werden. Als Einstieg seien zunächst an dieser Stelle die Lebenserwartung von Neugeborenen und diejenige von 65 - jährigen in der Deutschen Bevölkerung dargestellt wie auch die Entwicklung der Sterblichkeit im Zeitablauf für ausgewählte Alter.



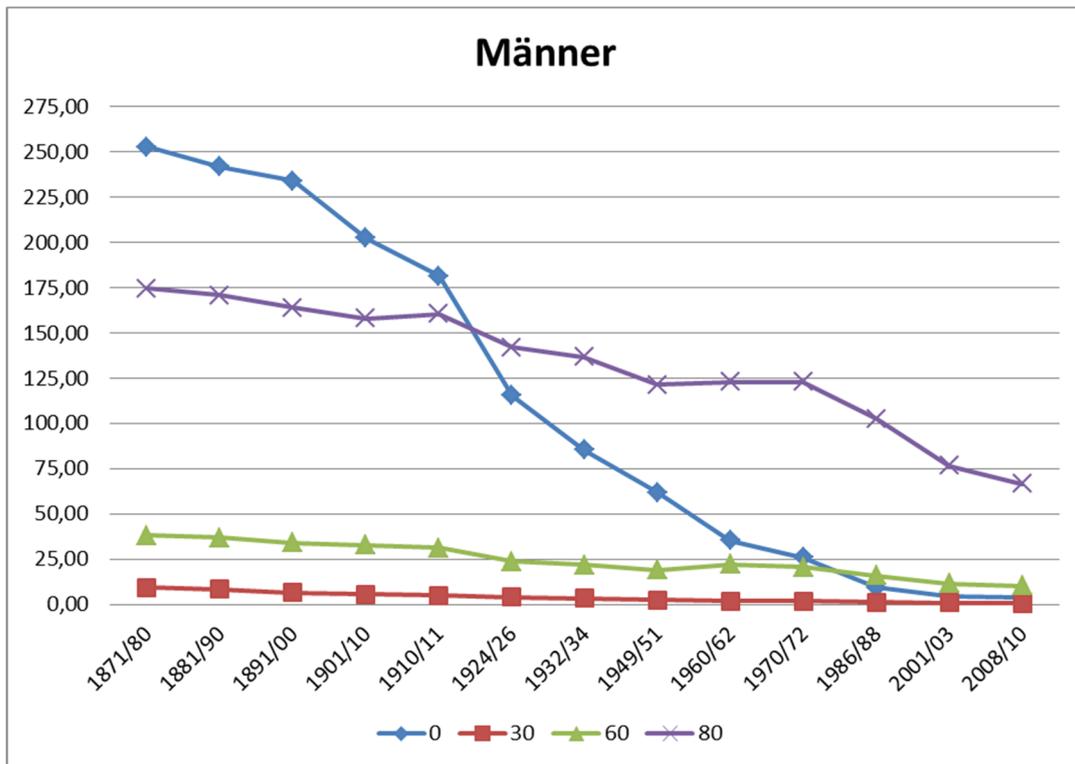
**Abbildung 1: Lebenserwartung von Neugeborenen<sup>3</sup>**



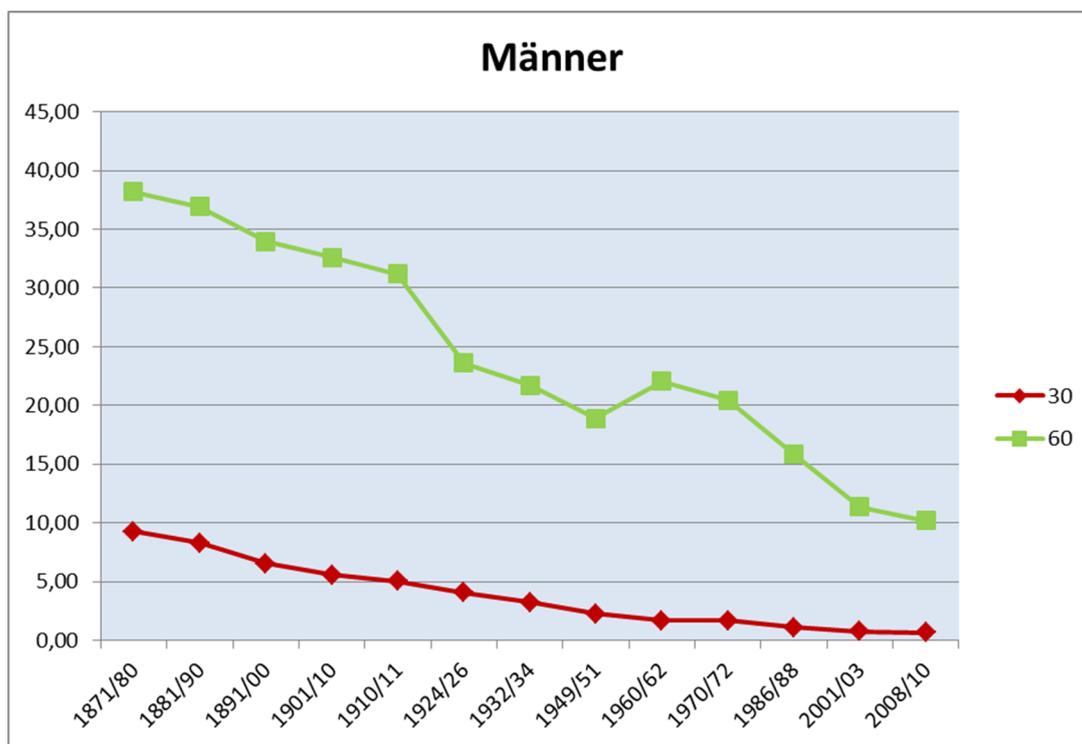
**Abbildung 2: Lebenserwartung von 65 – jährigen Männern und Frauen<sup>4</sup>**

<sup>3</sup> Quelle: Destatis

<sup>4</sup> Quelle: Destatis



**Abbildung 3: Entwicklung der Sterblichkeit im Zeitablauf für ausgewählte Alter<sup>5</sup>**



**Abbildung 4: Entwicklung der Sterblichkeit im Zeitablauf für die Alter 30 und 60 in vergrößertem Maßstab<sup>6</sup>**

<sup>5</sup> Quelle: Destatis

<sup>6</sup> Quelle: Destatis

Die analogen Graphiken für Frauen zeigen ein entsprechendes Bild.

Daher ist es für die Anbieter von Altersversorgungsleistungen ganz offensichtlich wichtig, sich mit dem Risiko zu beschäftigen, das mit der Übernahme des Langlebigkeitsrisikos verbunden ist. Untersucht man den Begriff des Langlebigkeitsrisikos etwas näher, so wird unmittelbar deutlich, dass es sich dabei um ein klassisches versicherungstechnisches Risiko handelt, das bewertet und gemanagt werden muss. Nicht der Anstieg der Lebenserwartung als solcher stellt das Risiko dar, sondern die Gefahr, dass der Anstieg stärker ausfallen könnte als prognostiziert.<sup>7</sup> Damit ergibt sich die Notwendigkeit, die zukünftige Sterblichkeit einschließlich des Sterblichkeitstrends möglichst gut einzuschätzen. Dazu geht man klassisch in zwei Schritten vor<sup>8</sup>:

1. Messung der aktuellen Sterblichkeit
2. Abschätzung des Trends der Sterblichkeitsverbesserung.

Je nach Zielsetzung sind ferner gegebenenfalls geeignete Sicherheitsabschläge oder Sicherheitszuschläge festzulegen.

Erschwert wird die Herleitung geeigneter Rechnungsgrundlagen für die Langlebigkeit durch eine Reihe von Nebenbedingungen. Diese sind teilweise eher technischer Natur, wie zum Beispiel:<sup>9</sup>

- die Heterogenität der Kollektive, zum Beispiel hinsichtlich der Geschlechterzusammensetzung, der Berufe, des Raucherstatus, der sozioökonomischen Stellung
- die Abhängigkeit der erwarteten Versicherungsleistungen nicht nur von der Lebensdauer, sondern auch von der versicherten/zugesagten Rentenhöhe.

Es ist eine bekannte Beobachtung, dass die Lebenserwartung positiv mit der Rentenhöhe korreliert, was dazu führt, dass nicht selten die Sterblichkeitsentwicklung mit einer Rentenhöhengewichtung abgeschätzt wird.

Daneben stehen aber auch Anforderungen aus dem gesellschaftlichen Umfeld, beispielsweise:

- die sozialpolitische Bedeutung bezahlbarer privater oder betrieblicher Altersvorsorge
- die Förderung des Wettbewerbs.

Tritt man nun in eine nähere Analyse des versicherungstechnischen Langlebigkeitsrisikos ein und geht in den genannten zwei Schritten vor, so ergeben sich die folgenden Teilrisiken<sup>10</sup>:

---

<sup>7</sup> vgl. Börger, BetrAV 5/2014, S. 457 ff

<sup>8</sup> vgl. Bauer, M. (2005), Blätter der DGVFM, S. 199 ff

<sup>9</sup> vgl. Bauer, M. (2005), Blätter der DGVFM, S. 199 ff

<sup>10</sup> ebda.

## 1. Messung der aktuellen Sterblichkeit → Basistafel

- Statisches Schwankungsrisiko
- Irrtumsrisiko
  - Basisrisiko und Selektionsrisiko  
(Unterschiede in der Bestandsstruktur sowie der Selektionsstruktur zwischen Herleitungs- und Anwendungsbestand)
  - strukturelle Abweichungen des zukünftigen Neugeschäfts
  - Parameterschätzungen innerhalb des Modellbestands
  - u.a.

## 2. Abschätzung des Trends der Sterblichkeitsverbesserung

- Statistisches Schwankungsrisiko
- Irrtumsrisiko
  - Basisrisiko
  - Parameterschätzungen innerhalb des Modellbestands
  - etc
- Änderungsrisiko
  - Trendbeschleunigung

Eine geringfügig andere Strukturierung der Teilrisiken sowie die Unterscheidung in systematisches und unsystematisches Risiko ist ebenfalls möglich.

## 1.2 Ausgewählte Modelle zu der Sterblichkeitsentwicklung im Überblick

Im Folgenden wird durchgehend die folgende Bezeichnung verwendet:

$q_{x,t}$  := Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen im Kalenderjahr t

### a) Methode der Sterbetafel DAV 2004 R<sup>11</sup>

In dem „traditionellen Modell“, das bei der Herleitung der Sterbetafel DAV 2004 R zugrunde gelegt wurde, sind die Sterblichkeitsverbesserungen nur vom Alter abhängig. Dabei legen die Beobachtungen nahe, dass sich die Sterbewahrscheinlichkeiten für jedes Alter x in exponentieller Weise verringern.

Konkret wird mit dem Ansatz gearbeitet:

$$\ln(q_{x,t}) = -F(x) \cdot t + B(x),$$

woraus unmittelbar folgt

$$q_{x,t} = \exp(-F(x) \cdot t + B(x))$$

Die Veränderungen der Sterbewahrscheinlichkeiten im Zeitablauf, also bei wachsendem t, folgen dann der Gesetzmäßigkeit

$$\frac{q_{x,t+1}}{q_{x,t}} = \exp(-F(x))$$

Die altersspezifischen Trendfaktoren werden dabei mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch lineare Regression aus den Werten  $\ln(q_{x,t})$  bestimmt.

### b) Methode von Heligman-Pollard (1980)<sup>12</sup>

Heligman und Pollard arbeiten mit einem parametrischen Ansatz, der vom Grundsatz her der Idee der früheren Sterbegesetze folgt. Die Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_{x,t}$  werden in einem parametrischen Ansatz dargestellt, wobei es gilt, die (große) Anzahl von Parametern geeignet an die empirischen Werte anzupassen und damit eine Extrapolation zu ermöglichen. Konkret sei von den verwendeten Varianten die nachfolgende erwähnt<sup>13</sup>:

$$q_{x,t} = A_t^{(x+B_t)^{C_t}} + D_t \cdot e^{-E_t \cdot (\ln(x) - \ln(F_t))^2} + \frac{G_t \cdot H_t^x}{1 + K_t \cdot G_t \cdot H_t^x}$$

<sup>11</sup> vgl. Bauer, M. (2005), Blätter der DGVM, S. 199 ff.

<sup>12</sup> vgl. Heligman/ Pollard (1980)

<sup>13</sup> vgl. Gaille, EAJ (2012), S. 49 ff.

wobei

$A_t, B_t, C_t, D_t, G_t \in (0,1)$ ,  $E_t, H_t > 0$ ,  $15 \leq F_t \leq 100$ .

Dabei hat jeder Parameter eine demografische und/oder eine biologische Bedeutung: Der erste Summand repräsentiert die Mortalitätsraten der Kindheit, der zweite Summand die Sterblichkeit der „mittleren Jahre“ einschließlich des Unfallbuckels und der dritte Summand schließlich die Mortalitätsraten der höheren Alter. Insbesondere bewirkt der Parameter  $K_t$  eine bessere Anpassung in den hohen Altern.

Die Parameter der Heligman-Pollard-Funktion können mit verschiedenen funktionalen Ansätzen modelliert werden. In Frage kommen:

- lineare
- quadratische
- exponentielle

Funktionen in Abhängigkeit von dem Betrachtungsjahr  $t$ . Diese Funktionen sind einfach strukturiert, enthalten wenige Parameter und können einfach plausibilisiert werden. Die Anpassung an die Beobachtungswerte geschieht mit normalen Kleinste-Quadrate-Ansätzen.

c) Methode von Lee-Carter (1992)<sup>14</sup>

Das bekannte und gut eingeführte Lee-Carter Modell erlaubt eine Analyse stetiger Sterblichkeitsveränderungen. Modelliert werden logarithmierte Sterbewahrscheinlichkeiten anhand der folgenden Formel:

$$\ln(q_{x,t}) = a_x + b_x \cdot k_t + e_{x,t}$$

Dabei ist

$$a_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \ln(q_{x,t})$$

$b_x$  = altersabhängiger Intensitätsparameter

$k_t$  = Zeittrend (stochastisch über die Zeit variierende Variable, welche der treibende Faktor der Sterblichkeitsentwicklung ist und über die Gewichtungsfaktoren  $b_x$  unterschiedlich stark auf die einzelnen Alter wirkt)

$e_{x,t}$  = (normalverteilter) Fehlerterm

Aus Normierungsgründen und um eine eindeutige Lösung zu erhalten, wird zusätzlich gefordert:

---

<sup>14</sup> vgl. Lee, R.D., Carter, L.R. (1992), JASA, S. 659 ff.

$$\sum_{x=0}^{\omega} b_x = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{t=1}^n k_t = 0$$

Das Lee-Carter Modell ist mit bekannten mathematischen Methoden durchführbar (Singularwertzerlegung, ARIMA-Prozesse) und daher sehr praktikabel, besitzt aber auch eine Reihe von Nachteilen (z.B. die zeitliche Konstanz der  $b_x$ ), die zu einer Vielzahl von Varianten und Weiterentwicklungen geführt haben.

### Analyse der wesentlichen Todesursachen

#### 1. Partial-Cause-Elimination-Methode (Sieger 2000)<sup>15</sup>

Die Idee bei diesem Ansatz liegt darin, dass der Rückgang der Sterblichkeit untrennbar damit verbunden ist, dass die Krankheiten, die früher besonders häufig zum Tode geführt haben, entweder heilbar oder aber besser behandelbar geworden sind. Als Beispiele seien genannt: Infektionskrankheiten (Hygiene, Antibiotika), Herz-Kreislaufkrankungen (Cholesterin- und Blutdrucksenker), Krebserkrankungen (operative Verfahren, Cytostatika), der Rückgang des Anteils der Raucher sowie die fortschreitende Entschlüsselung des menschlichen Genoms mit der Hoffnung, das Entstehen von Krankheiten besser zu verstehen und geeignete Diagnose- und Heilungsverfahren zu entwickeln. Damit stellt sich jeweils die Frage, welcher Effekt für die Verlängerung der Lebenserwartung zu erwarten wäre, wenn einzelne Krankheiten noch besser behandelt oder gar geheilt werden könnten.

Dies stellt also einen Bruch mit der bisher unterstellten Annahme einer nicht weiter aufgliederten säkularen Sterblichkeitsverbesserung dar und kann einen neuen Zugang zur der Analyse der Sterblichkeitsentwicklung bieten, der möglicherweise auch zu anderen Ergebnissen hinsichtlich der Verlängerung der Lebenserwartung führt.

Mathematisch liegen hier im Wesentlichen deterministische Ansätze unter Zugrundelegung von Modellannahmen für die Entwicklung der Todesfälle bei definierten Krankheitsbildern zugrunde. Möglich ist beispielsweise eine Orientierung an den Methoden der DAV<sup>16</sup>. Schließlich kann man die Modellannahmen noch dahingehend differenzieren, ob die Krankheiten

- vollständig besiegt werden
- teilweise besiegt werden
- nur in bestimmten Fällen besiegt werden
- oder ob der Todeszeitpunkt lediglich um einige Jahre verschoben wird.

<sup>15</sup> s. Sieger (2000), VW 12/2000, S.846 ff.

<sup>16</sup> ebda.

## 2. Edwards (2014)

Mit ähnlichen Grundüberlegungen kommt Edwards<sup>17</sup> zu deutlich anderen Schlussfolgerungen. Ein Blick auf die Todesfälle in Großbritannien aufgrund von:

- Krebs
- Cardio-vaskulären Erkrankungen
- Atemwegserkrankungen
- Erkrankungen des Verdauungstrakt

zeigt, dass die Anzahl der Gestorbenen aufgrund dieser Ursachen in den letzten zehn Jahren deutlich zurückgegangen ist. Weitere dramatische Verbesserungen sind entweder nicht mehr zu erwarten oder hätten keine großen Effekte mehr (z.B. weiterer Rückgang des Rauchens).

Hinzu kommen absehbare negative Entwicklungen:

- zunehmende Verbreitung von Diabetes und Übergewicht
- (relativ) sinkende staatliche Gesundheitsbudgets
- Ausbildung multiresistenter Bakterien.

Damit ist die Vermutung nicht abwegig, dass die Sterblichkeitsverbesserung sich insgesamt verlangsamen könnte. Aber auch Edwards geht davon aus, dass sich die Entwicklung für unterschiedliche Personengruppen verschieden darstellen wird.

Abschließend sei der Hinweis erlaubt, dass es mittlerweile eine annähernd unüberschaubare Vielfalt von Modellen gibt, insbesondere von Modellen, die mit stochastischen Simulationen arbeiten. Eine kleine Auswahl davon wird in den nachfolgenden Beiträgen ebenso diskutiert wie die Frage, wie die versicherungstechnischen Risiken, die sich auch bei sorgfältigster Modellierung nicht vermeiden lassen, von Rückversicherungsunternehmen übernommen oder in den Kapitalmarkt transferiert werden können.

---

<sup>17</sup> s. Edwards (2014), Emphasis 2014/1, S. 15 ff.

### 1.3 Literaturhinweise

1. Bauer, M.: Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen, Blätter der DGVFM (2005), S. 199 - 313
2. Börger, M.: Des einen Freud, des anderen Leid – Das Risiko der Langlebigkeit in der bAV, BetrAV (2014), S. 457-462
3. Carter, L.R., Lee, R.D.: Modeling and forecasting U.S. mortality, in: Journal of the American Statistical Association, 87 (1992), Issue 419, S. 659-675
4. Destatis: Sterbefälle, Lebenserwartung, [https://www.destatis.de/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Sterbefaelle/Tabellen/Lebenserwartung.pdf? blob=publ](https://www.destatis.de/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Sterbefaelle/Tabellen/Lebenserwartung.pdf?blob=publ) , Zugriff am 10.11.2014
5. Edwards, M.: Are Impressive Longevity Improvements Softening?, Emphasis (2014), S. 15-18
6. Gaille, S.: Forecasting mortality: when academia meets practice, European Actuarial Journal (2012), S. 49-76
7. Heligman, L., Pollard, J.H.: The Age Pattern of Mortality, Journal of the Institute of Actuaries (1980), S. 49-80
8. Sieger, C.: Die zuverlässige Abschätzung der zukünftigen Lebenserwartung; Versicherungswirtschaft (2000), S. 846-849
9. Wikipedia: Liste der ältesten Menschen; [http://de.wikipedia.org/wiki/Liste\\_der\\_ältesten\\_Menschen](http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_ältesten_Menschen), Zugriff am 10.11.2014

## 2 Die Sterberaten der Zukunft

Kai Kaufhold

### 2.1 Einführung und Definitionen

Das Ziel dieses Vortrags ist eine Einführung in stochastische Projektionen von Sterberaten. Zukünftige Sterblichkeitstrends zu modellieren und daraus Vorhersagen über Überlebenswahrscheinlichkeit und Sterbewahrscheinlichkeit zu treffen, ist eine Herausforderung, der sich Mathematiker und Aktuar seit dem 19. Jahrhundert stellen. In den vergangenen beiden Jahrzehnten hat es auf diesem Gebiet technische Entwicklungen gegeben, die sowohl die Herleitung von Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung (also „Best-Estimates“) erlauben als auch die Unsicherheit, mit der diese Best-Estimates behaftet sind, messbar machen. Denn Langlebighkeitsrisiko, welches Platz 4 als „Unwort“ des Jahres 2005 erreichte, ist nicht das Risiko länger zu leben, sondern das Risiko, dass sich der Aktuar bei der Projektion der Überlebenswahrscheinlichkeit irrt und deshalb die zukünftigen Leistungen an Versicherungsnehmer und Pensionäre unterbewertet. Dieses Risiko manifestiert sich, wenn durch neue Daten oder eine Verbesserung des Projektionsverfahrens klar wird, dass die bisherige Projektion das Überleben innerhalb des betreffenden Bestandes unterschätzt hat. Als Berufsstand haben wir Aktuar auf diesem Gebiet leider keine glorreiche Historie. Das ist für mich persönlich eine Motivation, bei der Vorhersage der Sterberaten der Zukunft alle technischen Möglichkeiten, die uns zur Verfügung stehen, auszunutzen und dabei gleichzeitig die gebührende Skepsis nicht zu vergessen, mit der die Ergebnisse kritisch untersucht werden müssen.

Um generell ein Gefühl für die Problematik zu bekommen, betrachten wir als Beispiel die deutsche Bevölkerungssterblichkeit<sup>18</sup>. Im Fall Deutschlands gibt es durch die Wiedervereinigung einen Bruch in der Datenhistorie. Daher betrachten wir der Einfachheit halber westdeutsche Daten, und hier nur die Männer. Aber zunächst ein paar Definitionen:

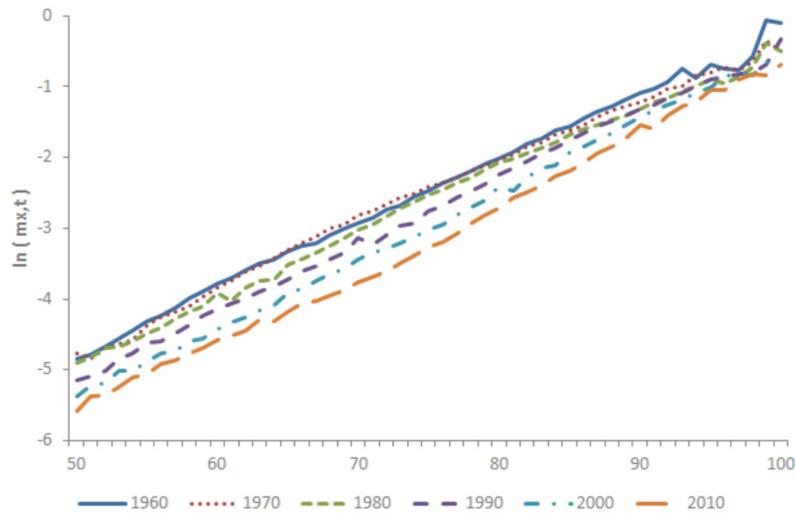
Die *diskrete Sterbewahrscheinlichkeit*  $q_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{l_{x,t}}$  einer Person, im Alter  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  bis zum Erreichen des Alters  $x + 1$  zu sterben, ist gleich dem Verhältnis der Anzahl der Todesfälle von  $x$ -jährigen Personen im betrachteten Bestand, die sich zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t + 1$  ereignen, zur Anzahl  $l_{x,t}$  der zum Zeitpunkt  $t$  lebenden  $x$ -jährigen. Die dazugehörige Änderung der Sterbewahrscheinlichkeit  $MI_{x,t} = 1 - \frac{q_{x,t}}{q_{x,t-1}}$  wird als *Sterblichkeitsverbesserungsrate* („mortality improvement [rate]“) bezeichnet.

Aus Versicherungs- und Bevölkerungsdaten leichter zu ermitteln ist die diskrete *Sterbeziffer*  $m_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{E_{x,t}^Z}$ , wobei man das *zentrale Exposure*  $E_{x,t}^Z$  näherungsweise aus den jeweiligen Le-

---

<sup>18</sup> Quelle hierfür ist die „Human Mortality Database“, in der für die wichtigsten Industrieländer Bevölkerungszahlen und Todesfälle zusammengetragen sind: [www.mortality.org](http://www.mortality.org).

benden am Anfang und am Ende der Zeitperiode ermittelt, oder von den am Anfang Lebenden die halbe Anzahl der Todesfälle abzieht.  $E_{x,t}^Z \cong l_{x,t} - \frac{1}{2}d_{x,t} \cong \frac{1}{2}(l_{x,t} + l_{x,t+1})$ . Man beschreibt das *Exposure* auch als *Verweildauer im Bestand*.

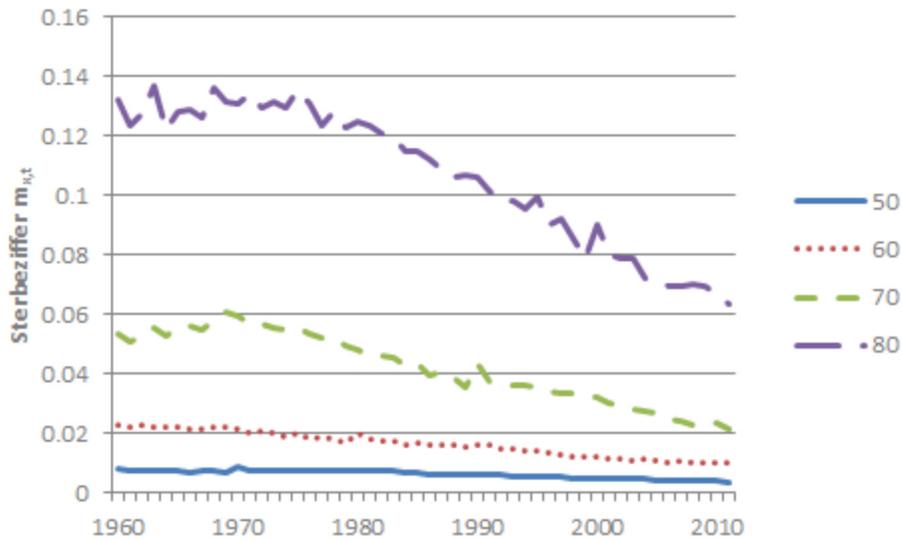


**Abbildung 5: Logarithmische Sterbeziffer  $\ln(m_{x,t})$  für westdeutsche Männer<sup>19</sup>**

Die Grafik in Abbildung 5 zeigt den natürlichen Logarithmus der Sterbeziffer für westdeutsche Männer zu verschiedenen Beobachtungszeitpunkten von 1960 bis 2010 über eine Altersspanne von 50 bis 99 Jahren. Man erkennt klar einen log-linearen Anstieg der Sterbeziffern, und ebenso dass sich in den letzten Jahrzehnten die Sterbeziffern über fast die gesamte Altersspanne gegenüber früheren Jahren verringert haben. Wenn man genauer hinschaut, erkennt man auch, dass die Veränderung der Sterbeziffer bei manchen Altersgruppen stärker war als bei anderen. Zum Beispiel hat sich die Sterblichkeit von 98-jährigen Männern über den gesamten Beobachtungszeitraum wenig verbessert, während es bei den Altersgruppen zwischen 60 und 90 zu erheblichen Verbesserungen der Sterberaten gekommen ist.

Dies ist auch aus Abbildung 6 abzulesen, das dieselben Daten in anderer Darstellung zeigt. Die Sterbeziffer ist hier für einzelne Alter gegen die Zeit aufgetragen, um Trends zu verdeutlichen. Während der absolute Unterschied im höchsten Alter (80 Jahre) am größten ist, sehen wir bei den 70-jährigen die größte relative Änderung in den Sterbeziffern. Daher werden wir bei unseren weiteren Beispielen immer wieder auf diese Altersgruppe zu sprechen kommen.

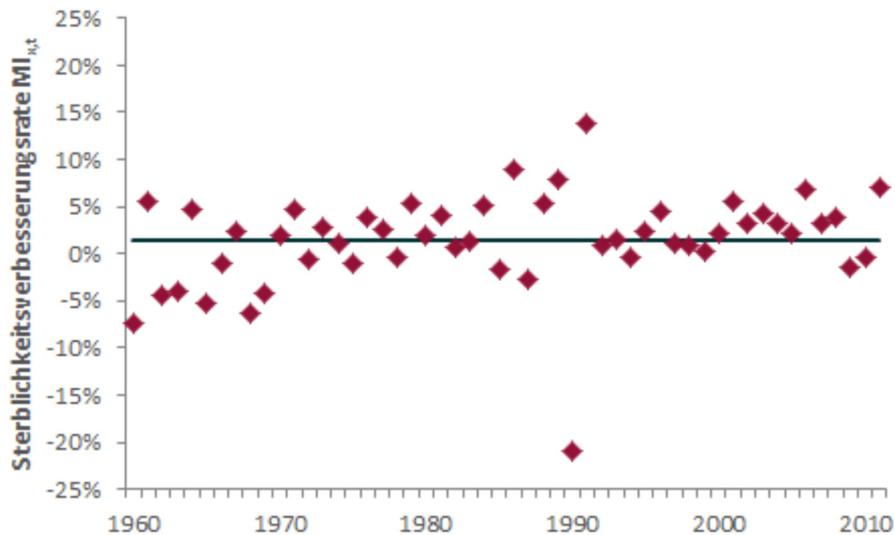
<sup>19</sup> Quelle: Human Mortality Database, [www.mortality.org](http://www.mortality.org)



**Abbildung 6: Sterbeziffer  $m_{x,t}$  gegen Zeit<sup>20</sup>**

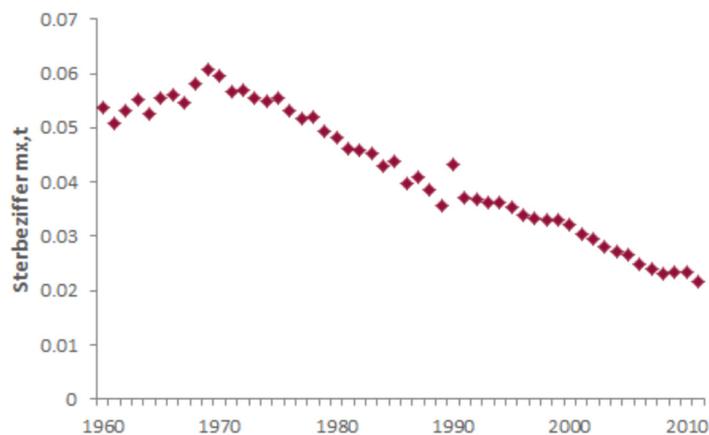
Nehmen wir zum Beispiel die Sterblichkeitsverbesserungsraten  $MI_{x,t}$  von 70-jährigen westdeutschen Männern und betrachten diese über den Zeitraum der letzten 50 Jahre (siehe Abbildung 7). Über diesen Beobachtungszeitraum lag die durchschnittliche Verbesserungsrate bei 1,4% (eingezogene Linie). Jedoch gibt es um diesen Mittelwert eine große Streuung. 70-Jährige, die vor 1900 geboren wurden, zeigten im Schnitt eine Verschlechterung der Sterblichkeit. Demgegenüber hat diese Altersgruppe bei den ab 1930 geborenen (Jahresmarke 2000 im Abbildung 7) eine überdurchschnittliche Verbesserung der Sterblichkeitsrate erlebt. Hierbei ist zu beachten, dass bei dieser Kennziffer immer die Sterbewahrscheinlichkeiten von zwei aufeinanderfolgenden Geburtsjahrgängen miteinander verglichen werden. Erwähnenswert sind noch die beiden „Ausreißer“: im Jahr 1990 hatten 70-jährige Männer eine um 21% höhere Sterbewahrscheinlichkeit als im Jahr zuvor, während im Jahr 1991 die Sterbewahrscheinlichkeit für diese Altersgruppe wieder um 14% relativ gesunken ist.

<sup>20</sup> Quelle: Human Mortality Database, [www.mortality.org](http://www.mortality.org)



**Abbildung 7: Sterblichkeitsverbesserungsraten für 70-jährige Männer<sup>21</sup>**

Vergleicht man diese Darstellung wiederum mit den rohen Sterbeziffern (siehe Abbildung 8), erkennt man in der letzteren Darstellung meiner Meinung nach die verschiedenen Perioden mit ihren unterschiedlichen Trends besser. Von 1960 bis 1969 stieg die Sterblichkeit der 70-jährigen an. Zwischen 1970 und 1989 gab es eine Phase mit hoher Verbesserungsrate und seit 1991 hat sich dieser Trend ein wenig verlangsamt.



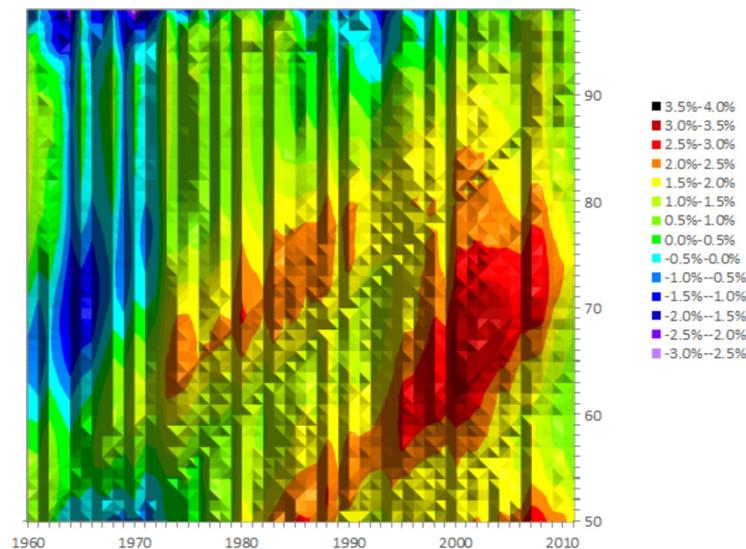
**Abbildung 8: Sterbeziffer  $m_{x,t}$  für 70-jährige Männer<sup>22</sup>**

Nun könnte man natürlich für jedes Alter eine solche Betrachtung durchführen und diesen Trend als Zeitreihe fortschreiben. Allerdings muss man sich vergegenwärtigen, dass bei ei-

<sup>21</sup>Quelle: Human Mortality Database, [www.mortality.org](http://www.mortality.org)

<sup>22</sup>Quelle: Human Mortality Database, [www.mortality.org](http://www.mortality.org)

ner solchen Betrachtung jeder Datenpunkt einen anderen Jahrgang beschreibt. Eine alternative Betrachtungsweise liefert eine zwei-dimensionale Darstellung der Sterblichkeitsverbesserungsraten gegen Alter und Zeit, wie im Abbildung 9.



**Abbildung 9: Sterblichkeitsverbesserungsraten im gleitenden 9-Jahres-Mittel gegen Zeit (horizontal) und Alter (vertikal)<sup>23</sup>**

Hier sind auf der senkrechten Achse das Alter und horizontal die Zeit aufgetragen. Wir erkennen deutlich Generationen-Effekte als diagonale Muster in den Sterblichkeitsverbesserungsraten. Dieser Effekt, dass bestimmte Geburtsjahrgänge gegenüber den vorhergehenden eine systematisch niedrigere Sterblichkeit bzw. höhere Sterblichkeitsverbesserungen zeigen, ist zum ersten Mal im U.K. erkannt worden, und wird als „Cohort Effect“ bezeichnet. Wie auch im U.K. sind es die Geburtsjahrgänge aus der Mitte der 30er Jahre, welche die höchsten Verbesserungsraten aufweisen. Einige Erklärungsversuche hierfür sind schon vorgeschlagen worden, ohne dass sich eine Theorie durchgesetzt hätte. So verlockend es wäre, darüber zu spekulieren, woher diese systematischen Effekte rühren mögen, möchte ich in diesem Vortrag davon Abstand nehmen und mich auf die Fragestellung konzentrieren, wie zukünftige Sterberaten modelliert werden können.

## 2.2 Was ist Trendrisiko bei Sterberaten?

Wir hatten schon festgestellt, dass Langlebigkeitsrisiko nicht das Risiko ist, länger als erwartet zu leben, sondern das Risiko des Aktuars, sich bei der Bewertung zukünftiger Leistungen an Versorgungsempfänger und Rentner zu irren. Dabei sollten wir zunächst zwischen dem Risiko unterscheiden, die Überlebenswahrscheinlichkeit für verschiedene Gruppen inner-

<sup>23</sup>Quelle: Human Mortality Database, [www.mortality.org](http://www.mortality.org)

halb der Gesamtbevölkerung falsch einzuschätzen, und dem Risiko, dass zukünftige Sterblichkeitstrends anders verlaufen, als unser Modell vorhersagt. Nur letzteres Trendrisiko ist Gegenstand dieses Vortrags<sup>24</sup>.

Trendrisiko seinerseits lässt sich unterteilen in Modellrisiko, Schätzrisiko und Zufallsrisiko. Unter Modellrisiko verstehe ich sowohl die Unsicherheit in der Wahl des Projektionsmodells als auch die Unsicherheit bei der Wahl des Datenbereiches zur Kalibrierung des Modells. Es gibt eine ganze Reihe von Projektionsmodellen für Sterblichkeit, die zum Teil sehr unterschiedliche Ergebnisse liefern. Zusätzlich hängen die Ergebnisse der Projektion manchmal stark davon ab, für welchen historischen Zeitraum und für welche Altersgruppen man Daten hinzuzieht, um das Modell anzupassen.

Hat man nun ein Modell gewählt und sich entschieden, welche Daten man verwenden will, so muss man sich klar machen, dass die Parameter des Modells, die man anhand dieser Daten geschätzt hat, mit Unsicherheit behaftet sind. Schreibt man dann mit Hilfe des Modells die Sterberaten in die Zukunft fort, ist diese Projektion zusätzlich mit Zufallsrisiko behaftet, welches man durch Methoden der Zeitreihen-Analyse quantifiziert.

### **2.3 Modellbeispiele: Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd**

Bei der Modellwahl wird man sich eine Reihe von Kriterien vorgeben, anhand derer man die verschiedenen möglichen Modelle miteinander vergleicht. Solche Kriterien werden unter anderem beschreiben, ob die wesentlichen Effekte, die man in den historischen Daten beobachten konnte, vom Modell zufriedenstellend abgebildet werden. Zum Beispiel sollte ein Modell möglichst die Perioden- und Generationen-Effekte, die wir bei der Sterblichkeit westdeutscher Männer gesehen haben, berücksichtigen und diese sinnvoll fortschreiben. Nützlich ist zusätzlich, wenn das Modell und seine Parameter intuitiv Sinn machen. Auch sollte das Modell möglichst robust gegenüber der Wahl des Beobachtungszeitraums sein, die ja letztlich subjektiv ist. Ein Modell, welches für verschiedene Beobachtungszeiträume stark unterschiedliche Ergebnisse liefert, würde dadurch einem großen Irrtumsrisiko unterliegen.

Eine weitere Anforderung an ein Projektionsmodell wird sein, dass man damit stochastische Szenarien erzeugen kann, um nicht nur die erwarteten zukünftigen Sterberaten zu projizieren, sondern auch die Verteilung dieser Raten - umso das Schwankungsrisiko messbar zu machen und für ein gegebenes Konfidenzintervall einen entsprechenden Verlauf der Sterberaten darzustellen. Eine Liste von qualitativen und quantitativen Auswahlkriterien schlagen *Cairns et al. (2009)* vor.

In den letzten zwei Jahrzehnten hat es viele Entwicklungen im Bereich der Projektionsmodelle für Sterberaten gegeben. Die zurzeit gebräuchlichsten Modelle lassen sich grob in zwei Gruppen unterteilen: zum einen Varianten des Modells, welches Lee und Carter in 1992 vor-

---

<sup>24</sup> Für ein Beispiel wie sozio-ökonomische Unterschiede in der Sterblichkeit quantifiziert werden können, sei verwiesen auf *Richards, Kaufhold and Rosenbusch (2013)*.

gestellt haben und zum anderen die Familie der Cairns-Blake-Dowd-Modelle. Die wichtigsten Repräsentanten dieser beiden Modell-Gruppen möchte ich im Folgenden vorstellen. Dabei folge ich der Notation von *Cairns et al. (2009)*.

### 2.3.1 Lee-Carter-artige Modelle

#### M1: Lee und Carter (1992)

$$\ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$$

Das ursprüngliche Modell von Lee und Carter beschreibt die logarithmische Sterbeziffer  $\ln(m_{x,t})$ , die sowohl altersabhängig als auch zeitabhängig ist, als Summe eines altersabhängigen Parameters  $\beta_x^{(1)}$  und eines bilinearen Terms  $\beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$ . Legt man dem Modell zum Beispiel die Sterberaten der Jahre 1956 – 2011 über die Altersspanne von 50 – 90 Jahren zugrunde, so muss man 82 altersabhängige Parameter  $\beta_x^{(1)}$  und  $\beta_x^{(2)}$  schätzen, sowie 56 zeitabhängige Parameter  $\kappa_t^{(2)}$ . In ihrem Paper von 1992 benutzen Lee und Carter die sogenannte Singulärwertzerlegung („Singular Value Decomposition“) zur Schätzung dieser Parameter. In späteren Anwendungen wird stattdessen die Maximum Likelihood-Methode verwendet, bei der eine Annahme über die Verteilungsfunktion für die Anzahl der Todesfälle getroffen werden muss. Üblich ist hier die Annahme von Poisson-verteilten Todesfällen, bzw. im Falle von heterogenen Beständen mit Dispersion eine negative Binomialverteilung. Ungeachtet des gewählten Schätzverfahrens halten wir fest, dass wir für das Lee-Carter-Modell eine große Anzahl von Parametern schätzen müssen, und daher einen geeignet großen Bestand zugrunde legen müssen. Das ist einer der wesentlichen Gründe, weshalb für Projektionsmodelle von Sterberaten in den meisten Fällen Bevölkerungsdaten verwendet werden.

Um das Lee-Carter-Modell verwenden zu können, ist es weiterhin notwendig, für die Parameter Nebenbedingungen festzulegen, damit diese eindeutig bestimmt werden können. Hierbei hilft zunächst die Intuition: der Parameter  $\beta_x^{(1)}$  wird häufig als die mittlere logarithmische Sterbeziffer für ein bestimmtes Alter  $x$  über dem Beobachtungszeitraum angesehen. Der Bilinear-Term  $\beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$  beschreibt dann die Veränderung dieser logarithmischen Sterbeziffer mit der Zeit. Der Zeit-Parameter-Index  $\kappa_t^{(2)}$  beschreibt dabei den Trend der Sterblichkeit und der Parameter  $\beta_x^{(2)}$ , wie sich diese zeitliche Veränderung bei verschiedenen Altern bemerkbar macht.

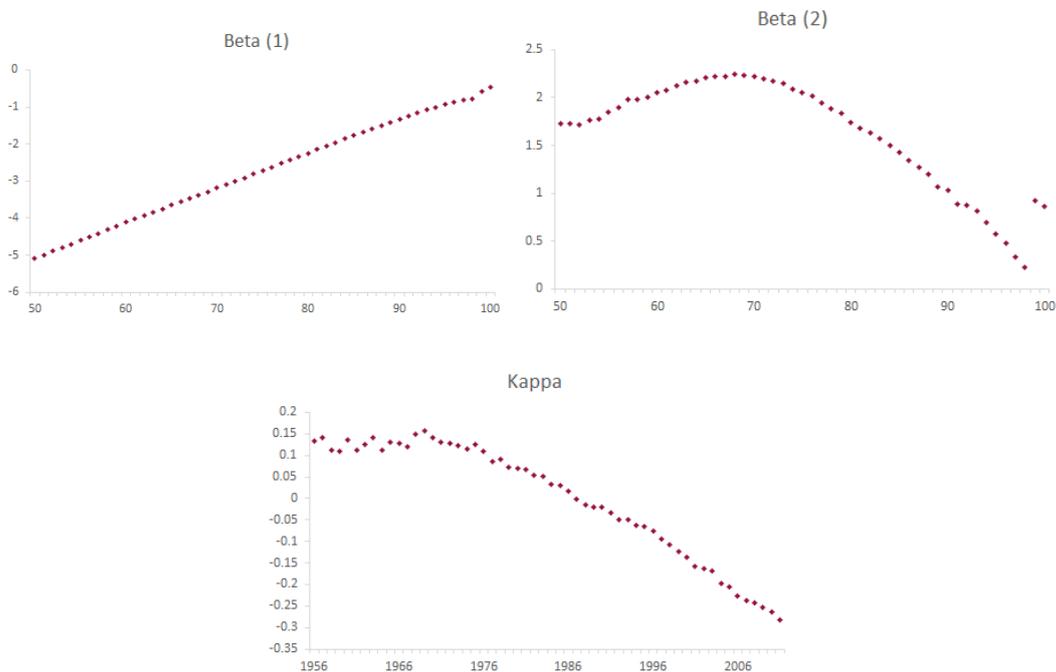
Das Modell lässt sich am besten verstehen, wenn man die Ergebnisse betrachtet, die wir zum Beispiel für westdeutsche Männer erhalten. Hierzu legen wir zunächst die beiden intuitiven Nebenbedingungen<sup>25</sup> fest:

---

<sup>25</sup> Üblich ist auch, sowohl die Summe der Zeitparameter als auch die Summe deren Quadrate null zu setzen. Generell hat die Wahl der Nebenbedingungen natürlich Auswirkungen auf die Parameterschätzungen. Die hier dargestellten Parameter dienen nur der Anschauung.

$$\sum \kappa_t = 0, \quad \sum \beta_x = 1,$$

Dann ergeben sich folgende Parameterschätzungen:

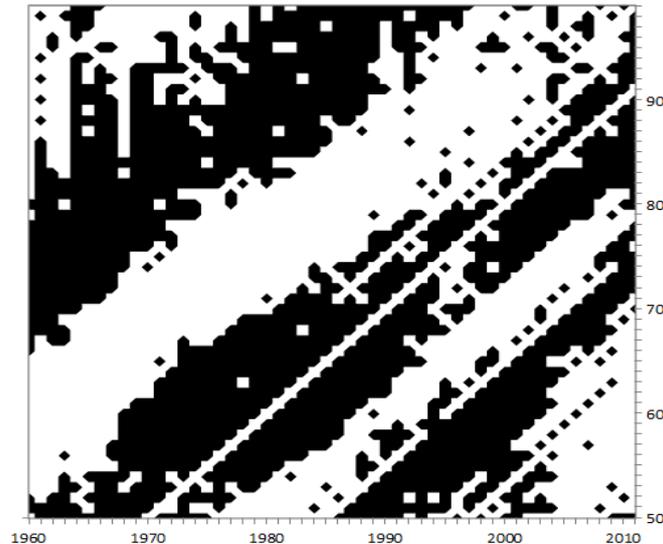


**Abbildung 10: Parameterschätzungen für M1 (Lee-Carter)<sup>26</sup>**

Die Struktur der Parameter-Schar  $\beta_x^{(1)}$  zeigt einen fast linearen Verlauf. Das entspricht intuitiv der Erwartung, dass die Sterbeintensität für Personen im Rentenalter Gompertz-artig ist, d.h. die Sterberaten einem log-linearen Verlauf folgen. Der zeitliche Trend  $\kappa_t^{(2)}$  entspricht ebenfalls unseren Erwartungen, die wir aus den Rohdaten gewonnen hatten, und zwar, dass sich die Sterblichkeit deutscher Männer in den sechziger Jahren kaum verbessert hat, während seit den Siebziger ein anhaltender Trend der Sterblichkeitsverbesserung vorherrscht. Dass dieser Trend bei 70-jährigen Männern an stärksten ausgeprägt war, erkennt man an den Werten für  $\beta_x^{(2)}$ , die im Alter von 70 ein Maximum annehmen.

Mithilfe der Residuen lässt sich qualitativ überprüfen, ob das Modell eine ausreichend detaillierte Abbildung der Wirklichkeit darstellt. In Abbildung 11 sind die Vorzeichen der Residuen aufgetragen. Die hellen Felder stehen für Kombinationen von Alter und Zeit, an denen die Sterberaten des Modells höher sind als die tatsächlich beobachteten, während in den dunklen Bereichen das Modell die Sterberaten unterschätzt. Wir erkennen an den klar ausgeprägten diagonalen Strukturen, dass es systematische Generationen-Effekte gibt, die das Modell nicht abbilden kann. Daher liegt es nahe, das Lee-Carter-Modell um solche Effekte zu erweitern.

<sup>26</sup> Quelle: Berechnungen mit Longevity Projections Toolkit, [www.longevity.co.uk](http://www.longevity.co.uk)



**Abbildung 11: Residuen (Vorzeichen) des Lee-Carter-Modells<sup>27</sup>**

Eine Erweiterung des Lee-Carter-Modells um Generationen-Effekte stellt das Modell von Renshaw und Habermann (2006) dar, welches zusätzlich zum bilinearen Zeit-Term einen bilinearen Term beinhaltet, welcher sich aus einem generationenabhängigen Parameter  $\gamma_{t-x}^{(3)}$  und einem altersabhängigen Parameter  $\beta_x^{(3)}$  zusammensetzt.

**M2: Renshaw und Habermann (2006)**

$$\ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$$

Wie man erkennt, ist das Renshaw-Habermann-Modell eine Verallgemeinerung von Lee-Carter unter Hinzunahme des Cohort Effect. In der Anwendung ist dieses Modell manchmal problematisch, weil es eine noch viel größere Anzahl von Parametern benötigt als das Lee-Carter-Modell. Daher ist es bei manchen Datenbeständen schwierig, ein lokales Maximum der Likelihood-Funktion zu finden. Einen Spezialfall des Renshaw-Habermann-Modells, mit welchem man oft bessere Ergebnisse erzielt, erhält man, indem man den Parameter  $\beta_x^{(3)} \equiv 1$  setzt. Ein weiterer Spezialfall, der auch häufig verwendet wird, ist das sogenannte „Age-Period-Cohort-Modell“ (auch APC-Modell genannt). Dieses erhält man, indem man auch beim zeitabhängigen Bilinear-Term auf die zeitabhängige „Response“ verzichtet, also folgendermaßen:

**M3: Age-Period-Cohort Modell:**

$$\ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)}$$

Wie jedes Modell, hat auch das APC-Modell seine Tücken. So sind hier die Lösungen selbst bei vorgegebenen Nebenbedingungen nie eindeutig, weil das Modell überbestimmt ist. Man muss daher eine Methode wählen, mit deren Hilfe man aus der unendlichen Zahl von

<sup>27</sup> sign(Actual – Expected), positives Vorzeichen=schwarz, negatives Vorzeichen=weiß; Quelle: Berechnungen mit Longevity Projections Toolkit, [www.longevity.co.uk](http://www.longevity.co.uk)

möglichen Parameterschätzungen eine herauswählt. Eine gängige Methode dies zu tun, ist, diejenige Kombination von Parametern zu wählen, bei denen die Alters-Parameter  $\beta_x^{(1)}$  den durchschnittlichen logarithmischen Sterberaten am ähnlichsten sind, z.B. gemessen an der Summe der Fehler-Quadrate. Dieses Verfahren wird in Cairns et al. (2009) beschrieben.

### 2.3.2 Cairns-Blake-Dowd Modelle

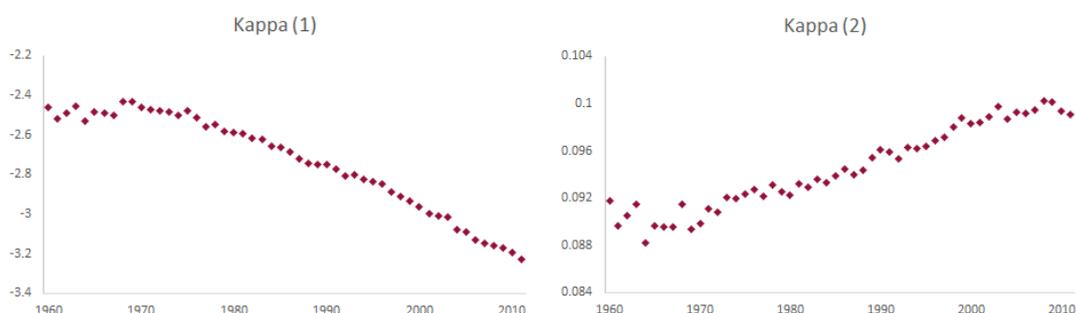
Nachdem wir nun das Lee-Carter-Modell und dessen Abkömmlinge kennengelernt haben, schauen wir uns die Familie der Cairns-Blake-Dowd-Modelle (CBD-Modelle) an, die von Cairns, Blake und Dowd (2006) vorgeschlagen worden sind. Diese beruhen auf dem Grundgedanken, dass wir die generelle Altersstruktur der Sterbewahrscheinlichkeit kennen und diese mit weniger Parametern beschreiben können. Fassen wir die Parameter-Tupel dann als Zeitreihen auf, können wir sie projizieren.

Das ursprüngliche, einfachste CBD-Modell sieht folgendermaßen aus:

**M5: Cairns-Blake-Dowd-Modell:**

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x})$$

Anstatt wie bei den Lee-Carter-Modellen die logarithmische Sterbeziffer zu modellieren, betrachten Cairns, Blake und Dowd die logistische Sterbewahrscheinlichkeit  $\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right)$ . Diese folgt gemäß dem CBD-Modell einem linearen Verlauf, der sich durch zwei Parameter, Achsenabschnitt  $\kappa_t^{(1)}$  und Steigung  $\kappa_t^{(2)}$ , beschreiben lässt. Auch beim CBD-Modell schätzen wir die Parameter mithilfe des Maximum-Likelihood-Verfahrens, können aber auf Nebenbedingungen verzichten. Für denselben Datenbereich wie oben ergeben sich dann die folgenden Parameter-Zeitreihen.



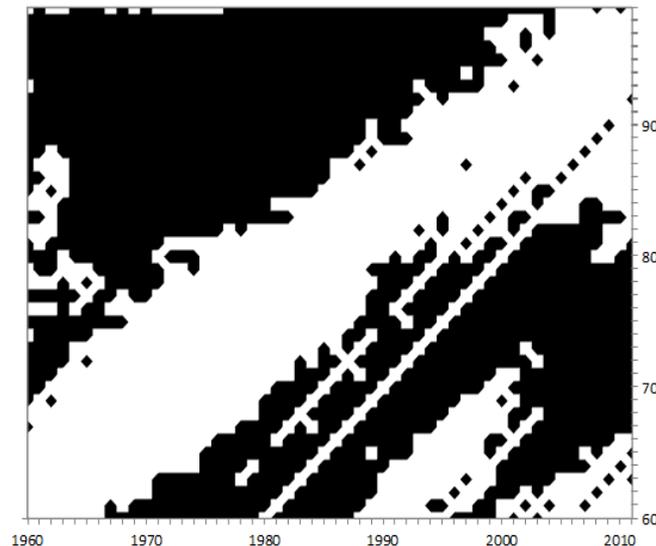
**Abbildung 12: Parameterschätzungen M5 (CBD-Modell)<sup>29</sup>**

Wir erkennen, dass der Trend von  $\kappa_t^{(1)}$  qualitativ dem Lee-Carter-Trend ähnelt, während  $\kappa_t^{(2)}$ , welches die logistische Steigung der jeweiligen Periodentafel beschreibt, bis auf kleine

<sup>28</sup> Für die Sterbewahrscheinlichkeit gilt dann:  $q_{x,t} = \frac{e^{(\kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}))}}{1 + e^{(\kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}))}}$

<sup>29</sup> Quelle: Berechnungen mit Longevity Projections Toolkit, [www.longevityprojections.co.uk](http://www.longevityprojections.co.uk)

Schwankungenmonoton steigt. Auf diese Art und Weise kann man, vereinfacht gesagt, die beiden Trends mit einfachen Zeitreihen-Prozessen fortschreiben und erhält so eine Projektion für die logistischen Sterbewahrscheinlichkeiten. Ähnlich wie im obigen Beispiel können wir nun durch Betrachtung der Residuen entscheiden, ob das CBD-Modell die tatsächlich eingetretenen Sterbewahrscheinlichkeiten angemessen abbildet. Die Muster in Abbildung 13 zeigen uns, dass auch das CBD-Modell zu simpel für die vorliegenden Daten ist.



**Abbildung 13: Residuen (Vorzeichen) des Cairns Blake Dowd-Modells<sup>30</sup>**

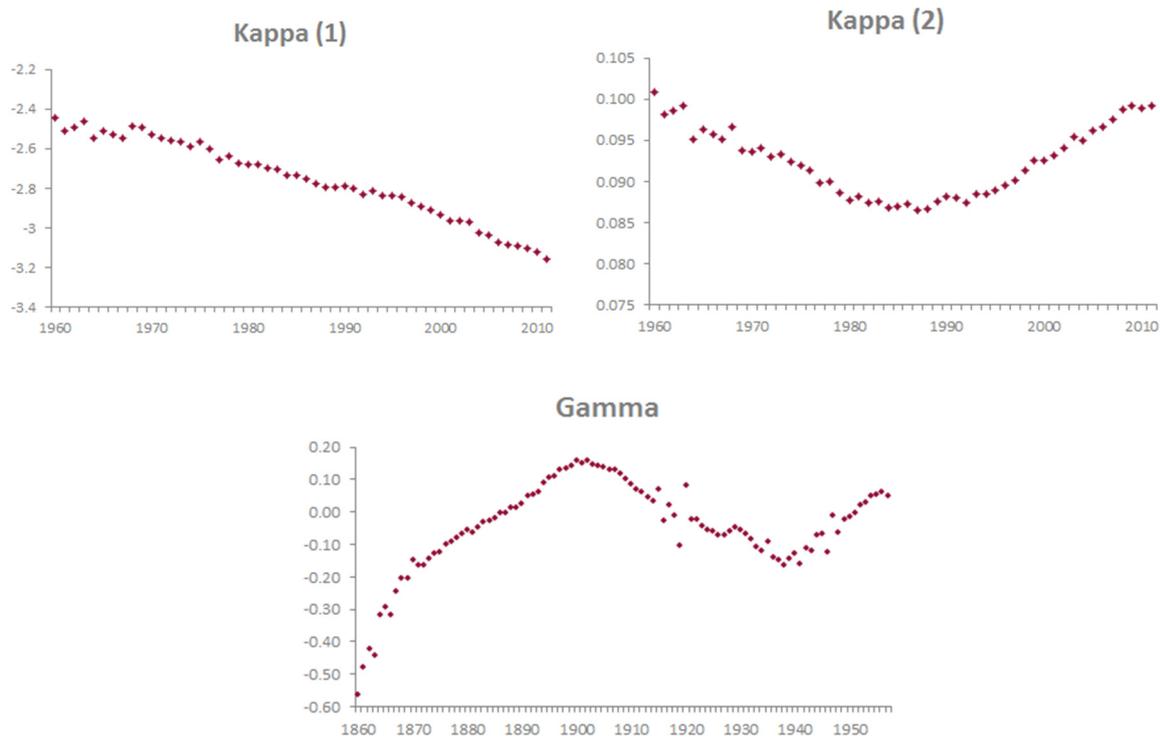
Folglich gibt es auch bei der CBD-Familie Verallgemeinerungen, die Generationseffekte mit berücksichtigen, wie z.B. das folgende erweiterte CBD-Modell.

**M6: Cairns-Blake-Dowd-Modell mit Kohorten-Parameter:**

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}$$

Der neu hinzugekommene Parameter  $\gamma_{t-x}^{(3)}$  ist für alle Personen, die im Jahr  $t - x$  geboren wurden, konstant. Dies sind sozusagen die Parameter, die die Diagonal-Effekte in den Zeit-Alter-Plots beschreiben. Ein Beispiel für eine entsprechende Parameterschätzung zeigt folgendes Abbildung 14. Wir erkennen zwar, dass der Trend für den Parameter  $\kappa_t^{(1)}$  noch gleichmäßiger abfällt, als im einfachen CBD-Modell, allerdings ist die Steigung  $\kappa_t^{(2)}$  der logistischen Sterberaten nun nicht mehr monoton, ganz zu schweigen vom Kohorten-Parameter  $\gamma_{t-x}^{(3)}$ . Wenn man von Generationen absieht, die vor 1900 geboren wurden, kann man für den Verlauf des Kohorten-Parameters erkennen, dass Geburtsjahrgänge in den späten 30ern im Vergleich zu benachbarten Generationen die niedrigsten Sterberaten haben.

<sup>30</sup> sign(Actual – Expected), positives Vorzeichen=schwarz, negatives Vorzeichen=weiß; Quelle: Berechnungen mit Longevity Projections Toolkit, [www.longevity.co.uk](http://www.longevity.co.uk)



**Abbildung 14: Parameterschätzungen für M6 (CBD mit Cohort Effect)<sup>31</sup>**

Die Tatsache, dass weder  $\kappa_t^{(2)}$  noch  $\gamma_{t-x}^{(3)}$  Monotonie aufweisen, macht die Extrapolation dieser Parameter in die Zukunft anspruchsvoll bis schwierig. Was den Generationenterm  $\gamma_{t-x}^{(3)}$  angeht, behilft man sich in der Praxis oft damit, dass man auf Extrapolation verzichtet, weil man nur an Geburtsjahrgängen interessiert ist, für die schon Daten vorliegen und für die  $\gamma_{t-x}^{(3)}$  geschätzt werden kann. Eine Alternative ist, ab dem zuletzt „gemessenen“ Parameter  $\gamma_{t-x}^{(3)}$  eine Brownsche Bewegung anzunehmen, also im Mittel keine Änderung der Sterblichkeit für spätere Generationen relativ zum letzten geschätzten Parameter  $\gamma_{t-x}^{(3)}$ .

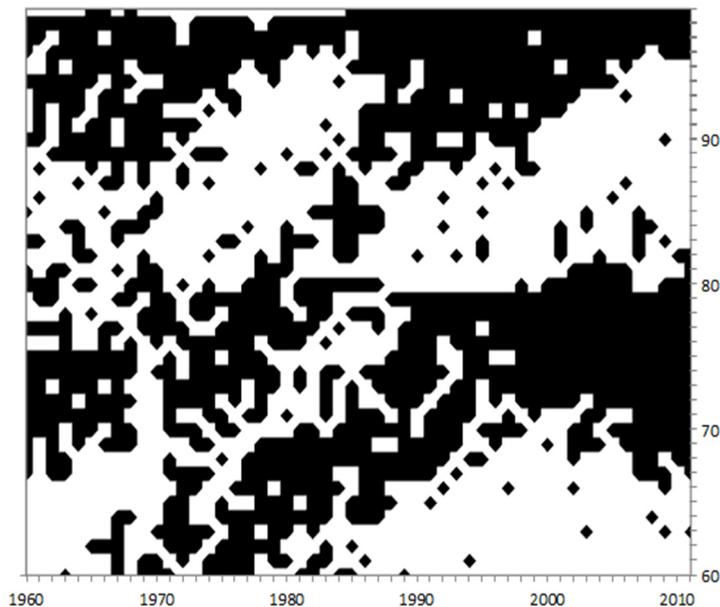
Das oben gezeigte Verhalten des Parameters  $\kappa_t^{(2)}$  verdeutlicht, wie wichtig die Wahl des Beobachtungszeitraums ist. Nimmt man den gesamten hier verwendeten Zeitraum von 1960 bis 2010, so könnte man vielleicht annehmen, dass sich die Steigung der Sterberaten im Mittel nicht verändert, denn  $\kappa_t^{(2)}$  beschreibt im Modell M6 (CBD mit Cohort Effect) die Steigung der logistischen Geraden. Betrachtet man nur den Zeitraum von 1980 bis 2010 wäre ein fortgesetzter linearer Anstieg der Steigung am wahrscheinlichsten. Ein solches Szenario von sinkender durchschnittlicher Sterblichkeit und einer immer steiler werdenden Sterbeintensität nennt man übrigens „Mortality Compression“, denn die Altersspanne, innerhalb der die meisten Todesfälle sich ereignen, wird in diesem Szenario immer kürzer. Wie das oben beschriebene Modell M6 aufzeigt, dürften wir für deutsche Männer von 1980 bis 2010 eine

<sup>31</sup> Quelle: Berechnungen mit Longevity Projections Toolkit, [www.longevityprojections.co.uk](http://www.longevityprojections.co.uk)

solche Komprimierung der Todesfälle auf kürzer werdende Altersspannen beobachtet haben. Können wir für die Zukunft nun davon ausgehen, dass sich dieser Trend fortsetzt, oder wird die Steigung der Sterbeintensität in der Zukunft wieder abnehmen?

Diese Frage ist aus dem Modell heraus nicht eindeutig zu beantworten. Mögliche Antworten sollten sich daher unter Berücksichtigung des Vorsichtsprinzips danach richten, welche Auswirkungen die Ergebnisse in der jeweiligen Anwendung haben.

Durch die zusätzlichen Kohorten-Parameter haben wir also unser Modell verfeinert, aber gleichzeitig die Unsicherheit erhöht, mit denen Projektionen aus diesem Modell heraus behaftet sind. Es stellt sich daher die Frage, ob sich die Einführung der neuen Parameter gelohnt hat. Eine detaillierte Analyse wird einen quantitativen Vergleich der Modelle beinhalten, wie zum Beispiel mit Hilfe der Informationskriterien von Akaike („AIC“) oder Bayes („BIC“), die den besseren Fit über die Erhöhung der Maximum-Likelihood gegen die Anzahl der Parameter abwägen. Hier wollen wir uns aber darauf beschränken, qualitativ die Residuen zu betrachten. Für eine eingehendere Untersuchung sei wieder auf *Cairns et al. (2009)* verwiesen. Die Vorzeichen der Residuen des CBD-Modells M6, welches die Kohorten-Parameter einschließt, zeigen eine deutlich zufälligerere Verteilung, als wir beim ursprünglichen Lee-Carter-Modell (M1) oder beim einfachen CBD-Modell (M5) beobachtet hatten (siehe Abbildung 15). Allerdings erkennen wir auch, dass besonders in den Jahren 1995 bis 2010 die lineare Altersstruktur des CBD-Modells die Sterberaten zu sehr vereinfacht, denn in manchen Altersbereichen unterschätzt das Modell die Sterberaten systematisch (Alter 70 – 80) und in manchen überschätzt es sie (Alter 80 – 95).



**Abbildung 15: Residuen (Vorzeichen) des Modells M6 (CBD mit Cohort Effect)<sup>32</sup>**

So liegt denn die nächste Erweiterung des CBD-Modells nahe: die logistischen Sterbewahrscheinlichkeiten werden durch ein Polynom zweiten Grades modelliert, und nicht durch eine Gerade.

**M7: Cairns-Blake-Dowd-Modell mit Kohorten-Parameter und quadratischem Term:**

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)}$$

Zusätzlich zum dritten zeitabhängigen Parameter  $\kappa_t^{(3)}$ , welchen man als Krümmungskoeffizient auffassen könnte, normiert man üblicherweise diesen mittels der Varianz der Altersverteilung  $\hat{\sigma}_x^2 = n^{-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$ . Zu diesem Modell sei lediglich angemerkt, dass man wieder eine Reihe von Nebenbedingungen stellen muss, damit sich die Parameter, insbesondere die Kohorten-Parameter, eindeutig bestimmen lassen.

Zusammenfassend haben wir sechs verschiedene Modelle kurz vorgestellt, die mit unterschiedlich vielen Parametern eine Beschreibung der historischen Daten zulassen. Die Güte des Fits ist gegen die Anzahl der Parameter abzuwägen, wofür es eine Reihe von quantitativen und qualitativen Kriterien gibt. Es gibt aber niemals das „beste Modell“ an sich, sondern die Aktuarin hat die Qual der Wahl, wobei vor allem der beabsichtigte Verwendungszweck des Modells im Vordergrund stehen muss. Denn die historischen Sterberaten möglichst gut zu erklären, ist nicht Selbstzweck, sondern geschieht mit dem Ziel, zukünftige Sterberaten vorherzusagen.

<sup>32</sup> Sign(Actual – Expected), positives Vorzeichen=schwarz, negatives Vorzeichen=weiß; Quelle: Berechnungen mit Longevity Projections Toolkit, [www.longevity.co.uk](http://www.longevity.co.uk),

### 2.3.3 Projektion der zeitabhängigen Parameter

Bei der Verwendung der vorgestellten Modelle zur Projektion der zukünftigen Sterberaten, ist das Vorgehen im Prinzip sehr einfach. Altersabhängige Parameter werden als konstant angenommen, und zeitabhängige Parameter werden mit Hilfe von verschiedenen Hilfsmitteln der Zeitreihen-Analyse in die Zukunft projiziert.

In allgemeiner Ausdrucksweise geht es bei der Zeitreihen-Analyse darum, stationäre Prozesse zu finden und stochastisch zu projizieren. Das einfachste Beispiel eines solchen Prozesses ist die Brownsche Bewegung, auch als Wiener Prozess oder Random Walk bekannt. Auf den einfachen Fall des Lee-Carter-Modells (M1) angewendet, haben wir eine Beschreibung der historischen logarithmischen Sterberaten:

$$\ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$$

Die zeitliche Veränderung der Sterberaten wird durch die Parameter  $\kappa_t^{(2)}$  beschrieben. Ein Random-Walk mit Drift beschreibt eine Möglichkeit, wie sich die Sterberaten von einer Periode  $t - 1$  zur nächsten Periode  $t$  verändern:

$$\kappa_t^{(2)} = \kappa_{t-1}^{(2)} + c + \epsilon_t(0, \sigma_\kappa)$$

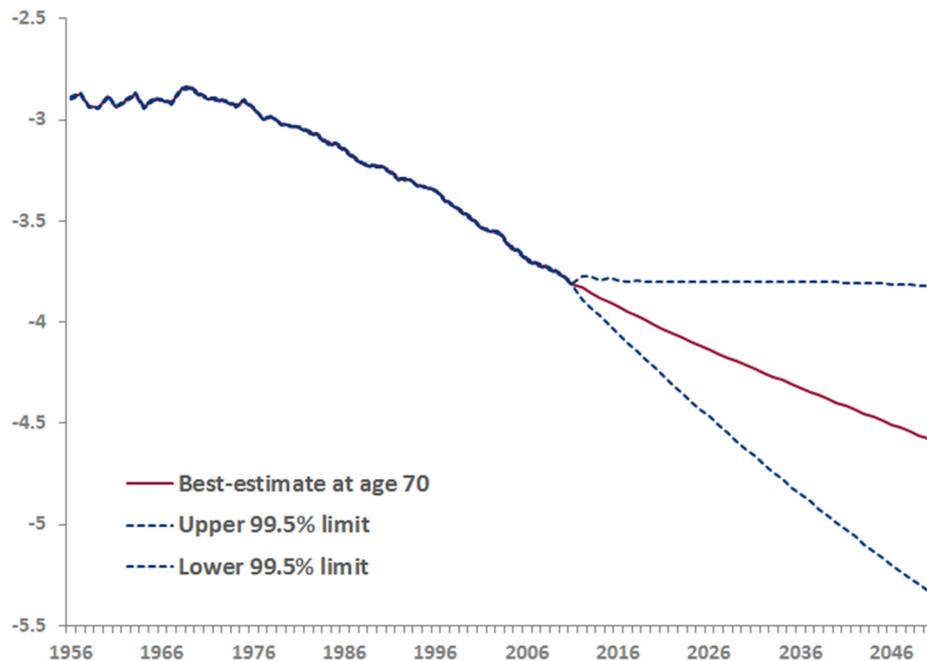
Hier ist  $c$  die Drift-Konstante und  $\epsilon_t$  ein stochastischer Fehlerterm. Wenn der Random Walk-Prozess die zeitliche Entwicklung des Parameters  $\kappa_t$  vollständig beschreibt, so wird der Fehlerterm  $\epsilon_t$  keinerlei zeitlichen Trend mehr beinhalten. Die Prognose zukünftiger logarithmischer Sterberaten  $\ln(m_{x,T+s})$  über einen letzten Beobachtungszeitpunkt  $T$  hinaus, ergibt sich dann aus der Projektion des Parameters  $\kappa_t^{(2)}$ :

$$\kappa_{T+s}^{(2)} = \kappa_T^{(2)} + s \times c \pm \sigma \times \sqrt{s}$$

$$\ln(m_{x,T+s}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_{T+s}^{(2)} = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} (\kappa_T^{(2)} + c s \pm \sigma \times \sqrt{s})$$

Hieraus ergibt sich zum Beispiel ein 99,5%-Konfidenzintervall für die Sterberaten von

$$\left[ \exp\left( \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} (\kappa_{T+s}^{(2)} - 2.58\sigma \times \sqrt{s}) \right), \exp\left( \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} (\kappa_{T+s}^{(2)} + 2.58\sigma \times \sqrt{s}) \right) \right]$$



**Abbildung 16: Projektion der Sterberaten  $m_{x,t}$  für Alter  $x=70$  mit 99,5% Konfidenz-Intervall<sup>33</sup>**

Man erkennt klar, wie sich die Unsicherheit in der Projektion mit zunehmendem Abstand vom Ursprung der Projektion vergrößert.

Das obige Beispiel war lediglich die Anwendung des einfachsten möglichen Prozesses auf das einfachste der Modelle. Im Allgemeinen wird man mehrere Klassen von stochastischen Zeitreihen-Prozessen untersuchen und denjenigen Prozess auswählen, der die zeitliche Entwicklung der Sterblichkeitsindizes am besten beschreibt. Auch hatten wir gesehen, dass es Modelle gibt, in denen mehrere Indizes gleichzeitig projiziert werden müssen. Hierfür gibt es auch eine Auswahl von Verfahren, mit denen man sich beschäftigen muss, um für seine eigenen Zwecke das best-geeignete auszuwählen. Fazit bleibt, dass es eine Vielzahl von Entscheidungen gibt, die die Aktuarin treffen muss, wenn es um die Modellwahl und die Projektion von Sterberaten geht. Das verdeutlicht die Wichtigkeit des Modellrisikos.

## 2.4 Statistische Modellierung des Value-at-Risk

Neben dem Pricing und der Berechnung ausreichender Rückstellungen für zukünftige Leistungen im Bereich Rentenversicherung und bAV, ist eine wichtige Anwendung für die Projektion zukünftiger Sterberaten die Berechnung des notwendigen Solvenzkapitals. Insbesondere die Solvenz-Anforderung  $SCR_{\text{longevity}}$  („*Solvency Capital Requirement*“) für das Lebensfallrisiko nach Solvency II kann mit Hilfe eines (partiellen) internen Modells berechnet werden, das auf einem statistischen Modell beruht, wie wir sie oben vorgestellt haben.

Die Berechnung der Solvenz-Anforderungen gemäß Solvency II erfolgt in allgemeiner Form folgendermaßen: Man ermittelt den „Net Asset Value“. das sind die zur Verfügung stehenden Eigenmittel, im Basis-Fall („*best estimate*“) und in einem gestressten Szenario („*stressed*“)

<sup>33</sup> Quelle: Berechnungen mit Longevitas Projections Toolkit, [www.longevitas.co.uk](http://www.longevitas.co.uk)

nach Ablauf eines Jahres ab Bilanzstichtag. Die Differenz im Net Asset Value  $\Delta Net Asset Value_{t+1}$  ergibt dann die Solvenz-Anforderung:

$$SCR_{longevity,t} = \Delta Net Asset Value_{t+1}$$

$$SCR_{longevity,t} \approx \Delta_{t+1}V = {}_{t+1}V^{stressed} - {}_{t+1}V^{best\ estimate}$$

Im Fall des Erlebensfallrisikos kann man vereinfachend davon ausgehen, dass innerhalb eines Jahres keine gravierenden „Schäden“ auftreten, die zum Unterschied zwischen *Best-Estimate* und gestresstem Fall beitragen. Dann ist die Differenz im Net Asset Value näherungsweise gleich dem Unterschied zwischen den für *Best-Estimate* und *Stress* ermittelten Rückstellungen  ${}_{t+1}V$ .

Gehen wir beispielsweise von einfachen lebenslangen Renten  $\ddot{a}_x$  aus, so betrachten wir einfach einen Bestand von verschiedenen solcher Renten für verschiedene Alter  $x \in \{60, 65, 70, 75, 80, 85, 90\}$  und drücken die Solvenz-Anforderung  $SCR_{longevity}$  als Prozentsatz der Rente im Basisfall (*best-estimate*, 50%-Quantil) aus:

$$SCR_{longevity,t} = \left( \frac{\ddot{a}_{x,t}^{99.5\%}}{\ddot{a}_{x,t}^{50\%}} - 1 \right) \times 100\%$$

Zur Berechnung des gestressten Rentenbarwerts  $\ddot{a}_{x,t}^{99.5\%}$  gibt es zurzeit drei gängige Verfahren:

Berechnung nach *Solvency II Standard-Formell*,

Pfad-Methode und

Value-at-Risk-Methode.

Bei der Standard-Formel in der Solvency II-Umsetzungsrichtlinie wird der gestresste Barwert ermittelt, indem die *Best-estimate*-Annahmen für die Sterbewahrscheinlichkeit um einen Faktor von 20% verringert werden.

$$q_{x,t}^{schock} = q_{x,t}^{best-estimate} \times (1 - f), \quad \text{mit } f = 20\%$$

Die Pfad-Methode ist nichts anderes als die Umsetzung eines Projektions-Modells, wie wir sie oben gesehen haben, wobei die projizierten Zeitreihen mit der Untergrenze des 99,5%-Konfidenz-Intervalls versehen werden.

$$\kappa_{T+s}^{99.5\% Pfad} = \kappa_T + s \times \kappa_0 - 2.58 \sigma_\kappa \sqrt{s}$$

Bei der Value-at-Risk-Methode handelt es sich um eine stochastische Simulation, die wir im Folgenden beschreiben.

#### 2.4.1 Value-at-Risk-Methode

Wie oben besprochen, geht es bei der Berechnung der Solvenzkapital-Anforderung nach Solvency II darum, zu modellieren, wie sich das Risiko über einen 1-jährigen Zeithorizont

entwickeln kann. Beim Erlebensfallrisiko ist wie besprochen das Risiko weniger, dass innerhalb eines Jahres weniger Leistungsempfänger sterben, sondern dass sich aus der Entwicklung der Sterberaten eine geänderte Rechnungsgrundlage für die Rückstellungen ergibt. Dies lässt sich simulieren, indem man anhand eines stochastischen Modells für Sterblichkeit die Bestandsdaten ein Jahr fortschreibt. Man simuliert sozusagen die Todesfälle eines Jahres und erhält daraus einen neuen Bestand zum Jahresende. Dieses zusätzliche Jahr an Information fügt man nun zu den Daten hinzu, aus denen man seine Rechnungsgrundlagen ursprünglich ermittelt hatte, und berechnet die Rechnungsgrundlagen mit den neuen Daten von neuem.



**Abbildung 17: Schematische Darstellung des Datenbestands**

Der Sachverhalt ist in Abbildung 17 schematisch dargestellt. Im Grunde simuliert man einen um ein Jahr erweiterten Datenbestand, aus dem man eine neue Rechnungsgrundlage mittels desselben statischen Modells herleitet. Für diese neue Projektion ergibt sich ein neuer Best-Estimate-Pfad  $\kappa_{T+s}^{50\% Pfad}$  für die Zeitreihe  $\kappa_{T+s}$  und die dazugehörigen Sterbewahrscheinlichkeiten, aus dem sich jeweils der Rentenbarwert für alle Alter ermitteln lässt.

Diesen Prozess wiederholt man immer wieder, und gewinnt so eine Verteilung der möglichen Best-Estimate Rentenbarwerte, die sich aus einem zusätzlichen Jahr an Informationen ergeben. Das 99,5%-Quantil dieser Verteilung ist dann der Value-at-Risk für Langlebigkeitsrisiko.

In Abbildung 18 werden die Ergebnisse der drei verschiedenen Verfahren gegenübergestellt. Hierbei ist vor allem interessant, wie das so ermittelte Risiko vom Alter abhängt. Beim Schock-Verfahren nach der Solvency II-Standard-Formel sehen wir, dass das Risiko scheinbar bei den höchsten Altern am höchsten ist. Das liegt daran, dass die höchsten Alter die höchste Sterbewahrscheinlichkeit haben, und der prozentuale Schock dort den größten Ausschlag gibt.

Projiziert man mit Hilfe eines stochastischen Modells für die Sterberaten Pfade für zukünftige Sterberaten, so erkennt man klar, dass das Risiko bei den jüngsten Altern am größten

ist, weil diese die längsten Lebenserwartung haben und die zukünftigen Sterbewahrscheinlichkeiten eine größere Unsicherheit haben, je weiter sie in die Zukunft projiziert werden.

Die Value-at-Risk-Methode hat ein ähnliches Verhalten für die verschiedenen Alter. Allerdings sind hier die ältesten Rentner mit einem etwas höheren Risiko behaftet. Der Grund hierfür ist, dass für diese hohen Alter am wenigsten Daten vorliegen und daher das Schätzrisiko hier am größten ist. Denn die Value-at-Risk-Methode berücksichtigt vor allem das Schätzrisiko. Durch das eine simulierte Jahr an Bestandsinformationen wird die Parameterschätzung des statistischen Sterblichkeits-Modells „gestört“ und die Parameter werden dann neu geschätzt.

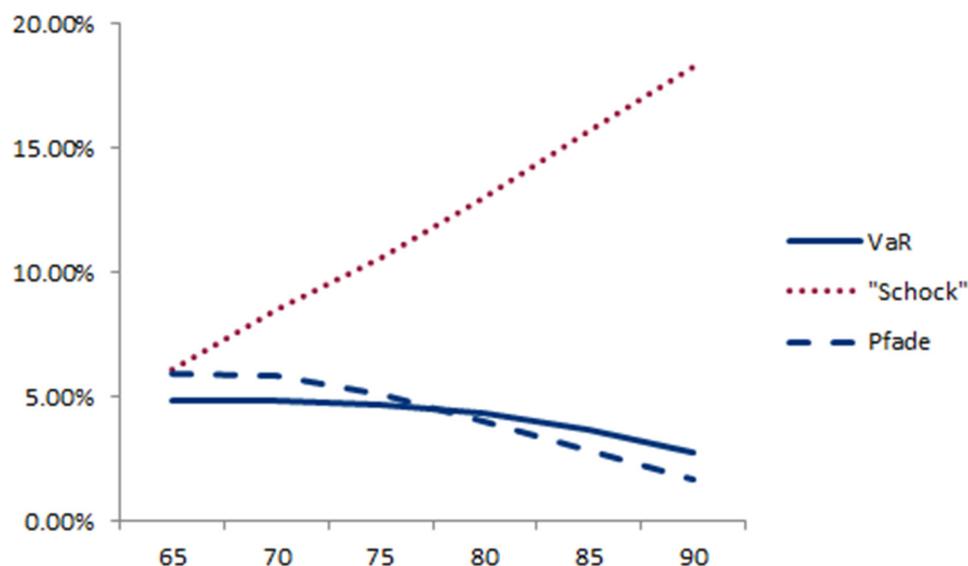


Abbildung 18: Vergleich  $SCR_{longevity}$  für verschiedene Berechnungsmethoden<sup>34</sup>

## 2.5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in diesem Vortrag gesehen, dass es eine ganze Reihe von verschiedenen Modellen gibt, mit deren Hilfe man die Sterberaten der Zukunft projizieren kann. Alle diese Modelle haben sowohl Vor- als auch Nachteile. Daher kann man nie von einem „besten Modell“ sprechen, sondern muss sich auf sein aktuarielles Urteilsvermögen verlassen und bei der Wahl des Modells vor allem den Zweck der Anwendung und das Vorsichtsprinzip im Auge behalten.

Stochastische Modelle für Sterberaten sind statistische Modelle, die historische Daten in einer vereinfachten Weise beschreiben, und die zeitliche Veränderung mittels einer möglichst kleinen Anzahl von Zeitreihen darstellen. Diese Zeitreihen können dann mit stochastischen Methoden in die Zukunft fortgeschrieben werden und liefern so die Sterberaten der Zukunft. Bei der Projektion von Sterberaten liegt also sowohl Modellrisiko vor als auch das

<sup>34</sup> Quelle: Berechnungen mit Longevitas Projections Toolkit, [www.longevitas.co.uk](http://www.longevitas.co.uk)

stochastische Risiko, zukünftige Sterberaten vorherzusagen. Außerdem sind die statistischen Modelle zusätzlich mit Parameter-Risiko behaftet, weil die Parameter, die die Modelle beschreiben, auf Grundlage eines endlichen Datenbestands geschätzt werden müssen.

Dieses Schätzrisiko fließt bei der Value-at-Risk-Methode für Langlebigkeitstrend-Risiko ein, einem Verfahren zur Bestimmung des Trendrisikos, welches im United Kingdom stark verbreitet ist.

Der Vortrag hat eine Reihe von wichtigen Bereichen ausgelassen, die für die Sterberaten der Zukunft auch von Bedeutung sind. So muss man zum Beispiel sichergehen, dass man die heutigen Sterbewahrscheinlichkeiten korrekt behandelt, insbesondere unter Berücksichtigung des Risikos heterogener Bestände. Heterogen sind Bestände hinsichtlich der Sterbewahrscheinlichkeit vor allem, weil verschiedene sozio-ökonomische Bevölkerungsgruppen ein stark abweichendes Todesfallrisiko aufweisen. Für Periodentafeln gibt es schon sehr differenzierte Verfahren, diese heterogenen Bestände zu analysieren und angemessene Periodentafeln zu erstellen. Was die Sterblichkeitstrends der verschiedenen Bevölkerungsgruppen angeht, steht die Forschung heute allerdings noch am Anfang. Einige Multi-Population-Modelle sind schon vorgeschlagen worden, aber die langfristige Divergenz oder Konvergenz verschiedenläufiger Trends ist noch nicht schlüssig nachgewiesen, geschweige denn modelliert.

Die Projektion zukünftiger Sterberaten ist ein faszinierendes, mathematisch anspruchsvolles Thema, welches über unsere Branche hinaus von großer Bedeutung ist. Hoffentlich hat der Vortrag auch Ihr Interesse geweckt, denn wir können jede Aktuarin und jeden Aktuar gebrauchen, der an dieser Herausforderung mitarbeitet.

## **2.6 Literaturhinweise**

Cairns, A.J.G., Blake, D. and Dowd, K. (2006) A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration, *Journal of Risk and Insurance*, 73, 687-718

Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A., and Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States, *North American Actuarial Journal*, 13(1), 1-35

Lee, R. D., and Carter, L. (1992). Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87, 659-671

Richards, S. J., Kaufhold, K., Rosenbusch, S. (2013). Creating Portfolio-specific mortality tables: a case study. *European Actuarial Journal* 3 (2), 295-319

## 3 Kollektiver Risikoausgleich in einem Rentenbestand

Oskar Goecke

### 3.1 Einleitung

Gegenstand des 7. FaRis & DAV-Symposiums ist das Management des *Langlebighkeitsrisikos*. Daher soll zu Beginn einmal die Frage gestellt werden: Wer trägt eigentlich das Langlebighkeitsrisiko? Betrachten wir zunächst das Langlebighkeitsrisiko in der gesetzlichen Rentenversicherung. Durch das Rentenreformgesetz 1999 wurde zunächst der sogenannte *Demografiefaktor* eingeführt<sup>35</sup>, der dann durch den *Nachhaltigkeitsfaktor* ersetzt wurde.<sup>36</sup> Der Demografiefaktor sah eine explizite Koppelung der Rentenanpassungen an die Lebenserwartung vor; der Nachhaltigkeitsfaktor nimmt zwar nicht direkt Bezug auf die Lebenserwartung, hat aber ebenfalls den Effekt, dass eine steigende Lebenserwartung der Rentner zu einer Minderung der Rentenanpassungen führt. Somit wird das Langlebighkeitsrisiko letztlich von den Rentnern selbst getragen.

In der Lebensversicherung scheint es auf den ersten Blick so zu sein, dass das Langlebighkeitsrisiko vom Versicherer getragen wird. Das ist aber nur bedingt richtig, denn die Versicherungsnehmer müssen die in die Beitragskalkulation vorgesehenen Sicherheitszuschläge zahlen. Darüber hinaus sind die Sicherheitsmittel eines Lebensversicherers zum weitaus überwiegenden Teil kollektiven Ursprungs, wurden also von der Versichertengemeinschaft aufgebaut. Selbst wenn das Langlebighkeitsrisiko durch eine Rückversicherungslösung ausgelagert wurde, so muss letztlich das Versichertenkollektiv die erforderlichen Prämien tragen. Das echte Eigenkapital eines Lebensversicherers ist in aller Regel kaum ausreichend, um substantielle Risiken wie das Langlebighkeitsrisiko oder das Kapitalanlagenrisiko auszugleichen.

Faktisch müssen also in jedem Alterssicherungssystem die Kernrisiken (u.a. das Langlebighkeitsrisiko) vom Kollektiv der Versicherten selbst getragen werden. Wenn immer das Langlebighkeitsrisiko ausgelagert oder von einem Eigenkapitalgeber übernommen wird, bedeutet dies eine Mehrbelastung für das Versichertenkollektiv, etwa in Gestalt einer Risikoprämie oder in Gestalt einer zusätzlichen Entlohnung des eingesetzten Eigenkapitals.

Wenn aber eine Auslagerung des Langlebighkeitsrisikos (ähnliches gilt für das Kapitalanlagenrisiko) letztlich von den Rentnern selbst finanziert werden muss, so sollte es im Interesse der Rentner sein, dass das Langlebighkeitsrisiko vom Kollektiv unmittelbar selbst getragen wird. Gegenstand der folgenden Untersuchung ist es daher zu prüfen, in welchem Maße ein Rentenbestand die Kernrisiken, nämlich das Langlebighkeitsrisiko und das Kapitalanlagenrisiko selbst tragen kann. Ein Rentenbestand, der sich vollständig aus sich selbst heraus finanzieren muss, muss sich selbst Regeln auferlegen, welche Mittel als Renten ausgeschüttet und welche Mittel für spätere Renten zurückgehalten werden müssen. Wir werden im Folgenden

---

<sup>35</sup> Rentenreformgesetz 1999 (BGBl. 1997 I S. 2998)

<sup>36</sup> Vgl. § 68 Abs. 4 SGB VI; eingeführt durch Gesetz zur Sicherung der nachhaltigen Finanzierungsgrundlagen der gesetzlichen Rentenversicherung (BGBl. 2004 I S. 1791)

daher auch *Asset-Liability Regeln* für einen selbstfinanzierenden Rentenbestand entwickeln. Hierbei wird auch zu untersuchen sein, wie die Risiken zwischen den Rentnergenerationen verteilt werden können.

### 3.2 Modellbeschreibung

Wir betrachten im Folgenden einen Rentenbestand in einem kapitalgedeckten Versorgungsmodell. Der Rentenbestand verfügt über einen Kapitalstock, der am Kapitalmarkt angelegt ist. Aus dem Kapitalstock und den jährlich anfallenden Kapitalerträgen werden die laufenden Renten finanziert. Vereinfachend gehen wir davon aus, dass alle Rentner die gleiche Rente erhalten. Wir unterstellen einen *offenen Rentenbestand*, d.h. jedes Jahr tritt eine neue Rentengeneration in den Rentenbestand ein, wobei die Gruppe der Neurentner jeweils einen Einmalbeitrag in den vorhandenen Kapitalstock einzahlt. Wir wollen für den Rentenbestand und die Kapitalanlagen den Begriff *Pensionsfonds* verwenden.<sup>37</sup> In unserem Modell gibt es keinen externen Kapitalgeber oder Garantiegeber – der Pensionsfonds muss sich also vollständig aus sich selbst heraus finanzieren.

Die Bilanz des Pensionsfonds hat eine besonders einfache Struktur:

|           |                        |
|-----------|------------------------|
| Portfolio | kollektive Reserve     |
|           | Deckungsrückstellungen |

**Abbildung 19: Vereinfachte Bilanz des Pensionsfonds**

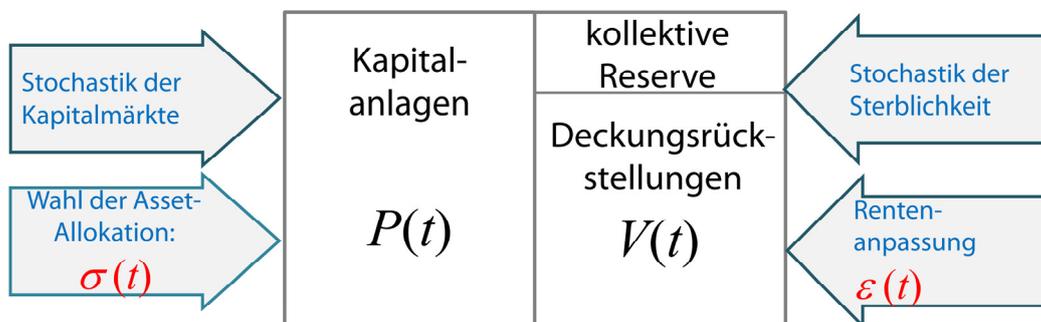
Die Deckungsrückstellungen werden konventionell gerechnet, nämlich als Barwert der künftigen Rentenzahlungen (pro Rentner bzw. pro Rentnergeneration) unter Zugrundelegung eines Rechnungszinses und Annahmen hinsichtlich der Überlebenswahrscheinlichkeiten. Die Differenz zwischen dem (Markt-) Wert des Portfolios und der Summe der Deckungsrückstellungen wollen wir als *kollektive Reserve* bezeichnen. Mit dem Begriff soll zum Ausdruck gebracht werden, dass der Teil des Kapitalanlagen, der nicht unmittelbar für die Finanzierung der Renten erforderlich ist, als eine Art Schwankungsreserve dient, um Wertänderungen der Assets und Änderungen bei den Deckungsrückstellungen auszugleichen. Wir sprechen von *kollektiver Reserve* um zu verdeutlichen, dass diese Mittel im Eigentum des Kollektivs aller Rentner ist, ohne dass ein einzelner Rentner oder eine einzelne Rentnergeneration hierauf einen konkreten Anspruch hat.

<sup>37</sup> Zu beachten ist, dass dieser Begriff nicht deckungsgleich ist mit dem Pensionsfonds im Sinne des § 112 VAG.

Der Pensionsfonds ist zweierlei Risiken ausgesetzt, zum einen das Kapitalanlagerisiko, das darin besteht, dass die *tatsächlich* Wertentwicklung der Kapitalanlagen von der *erwarteten* abweicht und zum anderen vom Langleblichkeitsrisiko, das also ein Rentner oder einer Rentnergeneration länger lebt, als bei Rentenbeginn zu erwarten war. Um die Komplexität des Modells zu reduzieren, unterstellen wir einen *deterministischen* Rentenzugang: Wir unterstellen, dass bereits zum Zeitpunkt  $t$  der Rentenzugang zum Zeitpunkt  $t+1$  bekannt ist.

Kapitalmarktentwicklung und Sterblichkeit sind also die stochastischen Faktoren des Modells. Allerdings kann die Pensionsmanagerin (oder der Pensionsmanagerin) die Bilanz steuern, nämlich durch die Asset Allokation und durch die Rentenanpassung.

## Asset Liability Management



**Abbildung 20: Stochastische Faktoren und Steuerungsparameter des Modells**

### 3.2.1 Das Sterblichkeitsmodell

Zur Modellierung der Sterblichkeit insbesondere der Stochastik der Sterblichkeit verwenden wir ein auf die Autoren *Cairns, Blake* und *Dowd* zurückgehendes Modell (*CBD-Modell*)<sup>38</sup>.

Bezeichne  $p(x, t)$  die 1-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer zum Zeitpunkt  $t$   $x$ -jährigen Person, so wählen wir hierfür folgenden Ansatz:

$$p(x, t) = \left(1 + \exp(\kappa_1(t) + \kappa_2(t)(x - z))\right)^{-1} \text{ für } z \leq x < \omega = 115 \text{ und } p(\omega, t) = 0.$$

mit zwei linearen zeitabhängigen Funktion  $\kappa_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  und  $\kappa_2(t) = \beta_0 + \beta_1 t$ . Das Renteneintrittsalter sei hier mit  $z$  bezeichnet.

Setzt man  $\text{logit}(q) := \ln\left(\frac{q}{1-q}\right)$ , so gilt  $\text{logit}(1 - p(x, t)) = \kappa_1(t) + \kappa_2(t)(x - z)$ .

<sup>38</sup> Cairns, A. J. G., D. Blake and K. Dowd: *A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration*, *The Journal of Risk and Insurance*, 73, (2006), 687-718.

Die Überlebenswahrscheinlichkeiten sind also alters- und zeitabhängig. Durch Kalibrierung der Parameter  $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1\}$  ist das Modell eindeutig bestimmt. Für die im Folgenden dargestellten Modellrechnungen kalibrieren wir das Modell auf der Grundlagen der *Richttafeln 2005G*. Neben den Kalibrierungen für Männer und Frauen haben wir auch eine „Hybridkalibrierung“ für einen jeweils zur Hälfte aus Männern und Frauen bestehenden Bestand<sup>39</sup> ermittelt – vgl. Tabelle 1.

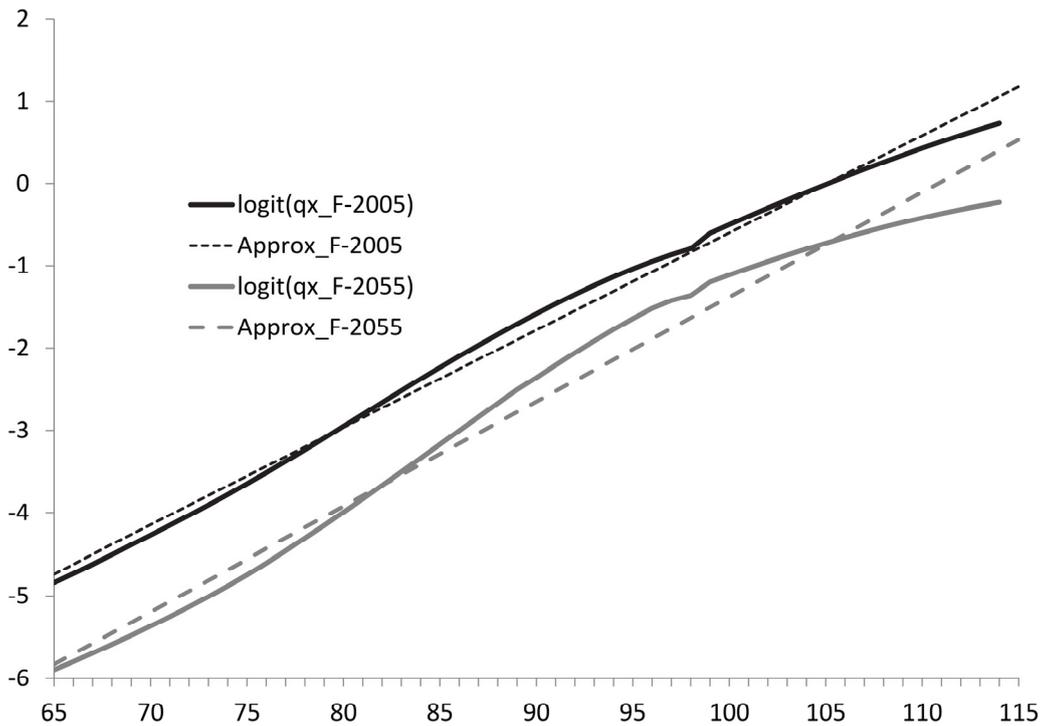
|            | Männer     | Frauen     | gemischter Bestand |
|------------|------------|------------|--------------------|
| $\alpha_0$ | - 4.0547   | - 4.8885   | - 4.4716           |
| $\alpha_1$ | - 0.023129 | - 0.024149 | - 0.023639         |
| $\beta_0$  | 0.10737    | 0.13291    | 0.12014            |
| $\beta_1$  | 0.00037387 | 0.00035482 | 0.00036435         |

**Tabelle 2: Übersicht der Parameter für das CBD-Modell bei einer Kalibrierung auf der Grundlagen der Periodentafeln 2005- 2055 der Richttafeln Heubeck 2005G<sup>40</sup>**

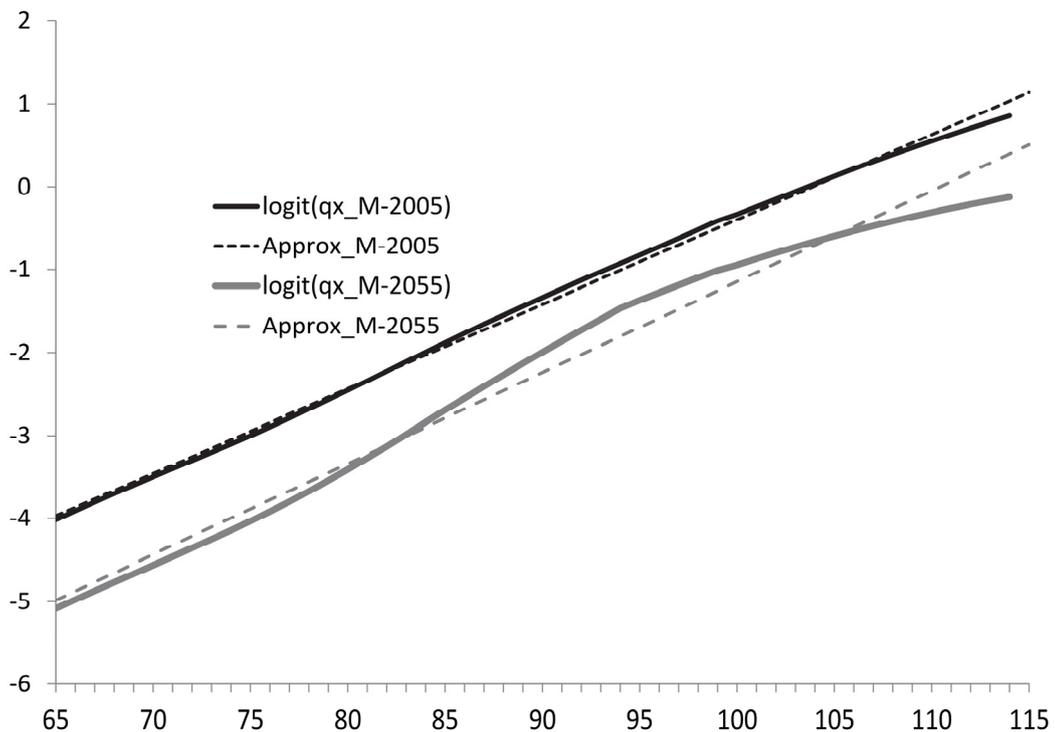
Die folgenden Abbildungen illustrieren die Güte der Approximation. Hierbei ist zu beachten, dass die Richttafeln ihrerseits Approximationen darstellen und dass die hochgerechneten Periodentafeln der *Richttafeln 2005G* auf stark vereinfachten Annahmen beruhen. Es sei aber darauf hingewiesen, dass das hier vorgestellte Modell *nicht* das Ziel verfolgt, die künftige Sterblichkeitsentwicklung zu prognostizieren. Vielmehr geht es darum, das Langlebkeitsrisiko plausibel zu modellieren.

<sup>39</sup> Bei dieser Hybridkalibrierung ist allerdings zu beachten, dass sich bei einem gemischten Anfangsbestand, bei dem jede Altersgruppe gleich viele Männer und Frauen zählt, das Verhältnis der Geschlechter aufgrund der unterschiedlichen Sterblichkeit von Männern und Frauen laufend verändert. Die Hybridkalibrierung hat also einen reinen Modellcharakter.

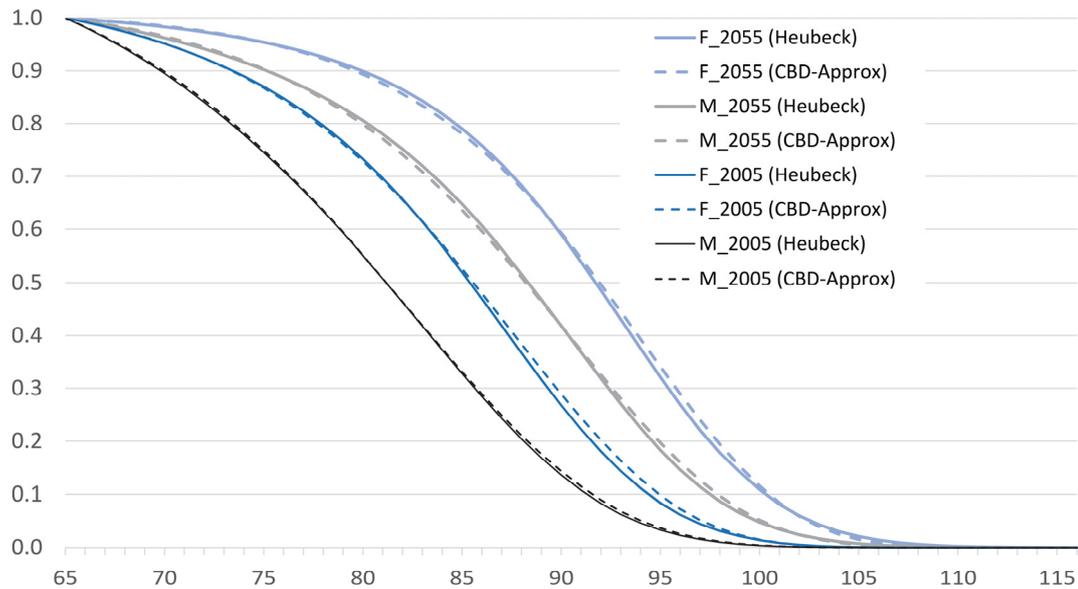
<sup>40</sup> Kalibriert wurde auf der Grundlage der Periodentafeln 2005 – 2055 der Richttafeln beschränkt auf die Alter 65 bis 100.



**Abbildung 21:  $\text{logit}(1-p(x, t))$  für die Basistafel 2005 und Projektionstafel 2055 der Richttafeln 2005G für Frauen sowie die lineare Approximation im CBD-Modell**



**Abbildung 22:  $\text{logit}(1-p(x, t))$  für die Basistafel 2005 und Projektionstafel 2055 der Richttafeln 2005G für Männer sowie die lineare Approximation im CBD-Modell**



**Abbildung 23: Vergleich der Periodentafeln für die Basistafel 2005 und Projektionstafel 2055 der Richttafeln 2005G für Frauen und Männer sowie die Approximationen im CBD-Modell**

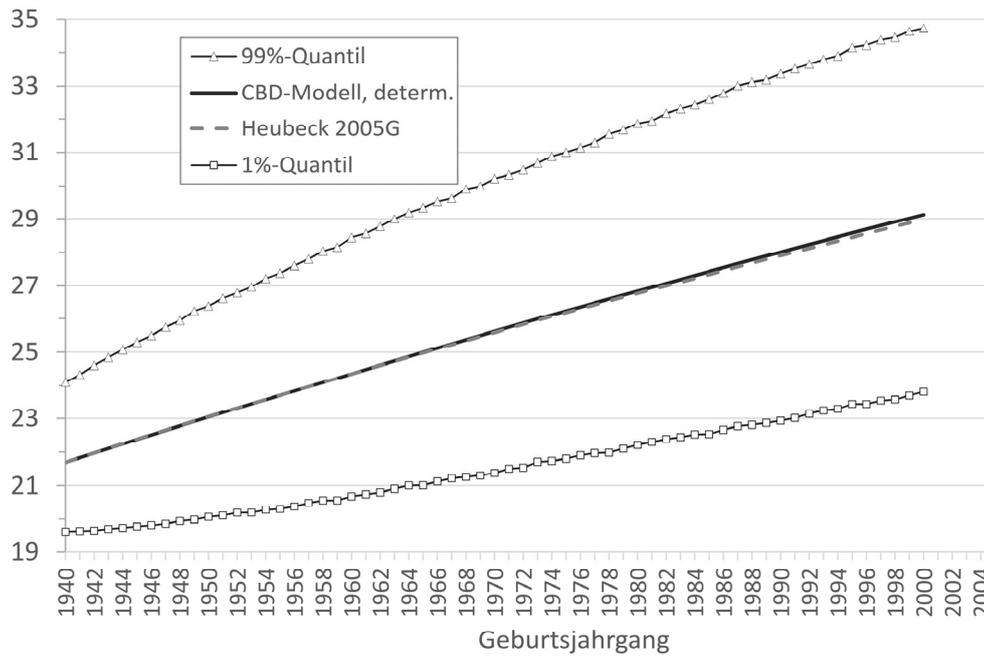
Wir ergänzen das *CBD-Modell* noch um eine stochastische Komponente und setzen

$$\tilde{\kappa}_1(t) := \kappa_1(t) + \sigma_\alpha W'_{t+1} \quad \text{und}$$

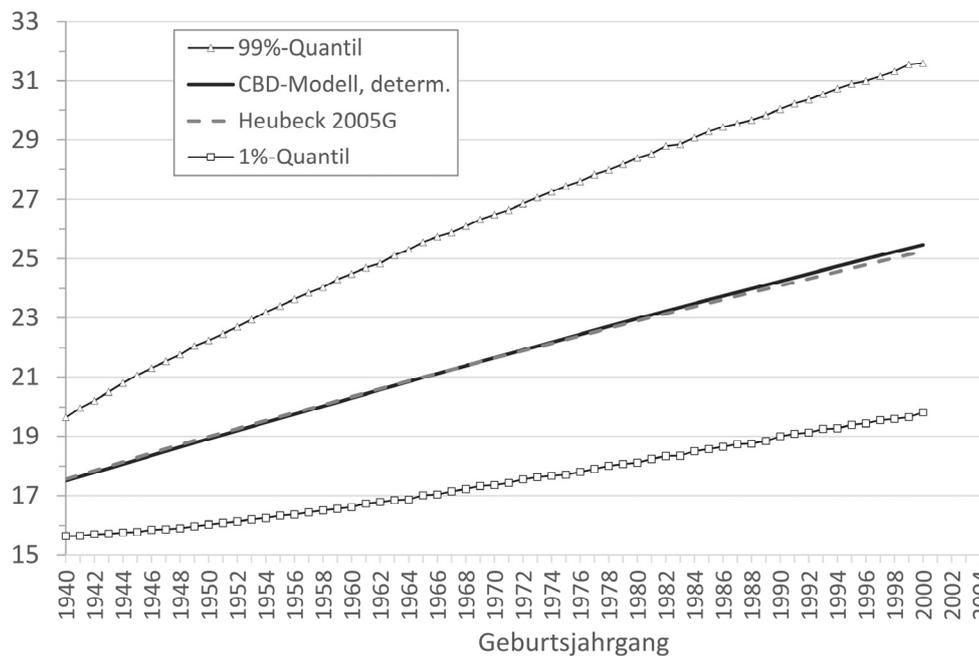
$$\tilde{p}(x, t) := \left(1 + \exp(\tilde{\kappa}_1(t) + \kappa_2(t)(x - z))\right)^{-1} = \left(1 + \exp(\sigma_\alpha W'_{t+1}) \exp(\kappa_1(t) + \kappa_2(t)(x - z))\right)^{-1},$$

wobei  $W'_{t+1}$  ein Standard-Wienerprozess darstellt und  $\sigma_\alpha$  als Maß für die Stochastizität der Sterblichkeitsentwicklung interpretiert werden kann. Die Zeitverschiebung in der obigen Darstellung soll zum Ausdruck bringen, dass die tatsächlichen 1-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten der  $x$ -jährigen Personen  $\tilde{p}(x, t)$  nicht zum Zeitpunkt  $t$ , sondern erst zum Zeitpunkt  $t+1$  beobachtet werden können.

Für das stochastische Modell muss der zusätzliche Modellparameter  $\sigma_\alpha$  kalibriert werden. Die Kalibrierung kann natürlich nicht auf der Basis der Richttafeln durchgeführt werden, da es sich dabei um ein deterministisches Modell handelt. Statt dessen greifen wir zurück auf eine Kalibrierung des *CBD-Modells* auf der Grundlage der Sterbetafeln für England und Wales für die Jahre 1982 bis 2002; es ergibt sich  $\sigma_\alpha \approx 4\%$ . Die folgenden Abbildungen zeigt die Wirkung der stochastischen Komponente. Die Spannbreite zwischen dem 99%-Quantil und dem 1%-Quantil (für Männer und Frauen des Geburtsjahrgangs 2000 beträgt die Differenz mehr als 11 Jahre) lässt erkennen, welchem Langlebigkeitsrisiko ein Rentenbestand ausgesetzt ist.



**Abbildung 24: Mittlere fernere Lebenserwartung 65-jähriger Frauen in Abhängigkeit vom Geburtsjahr, Vergleich der Werte nach Richttafeln 2005G und des CBD-Modell (deterministisch und Quantile des stochastischen Modells)**



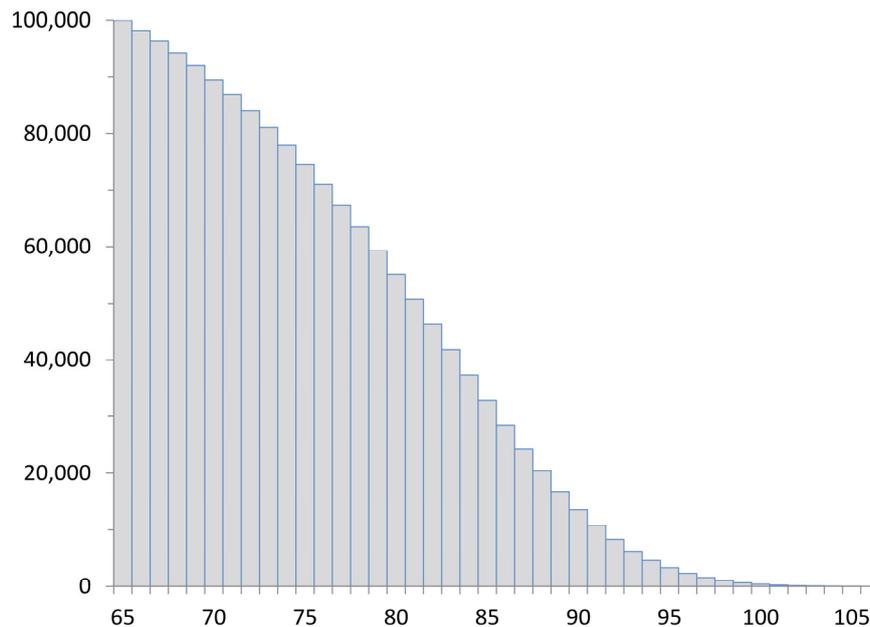
**Abbildung 25: Mittlere fernere Lebenserwartung 65-jähriger Männer in Abhängigkeit vom Geburtsjahr, Vergleich der Werte nach Richttafeln 2005G und des CBD-Modell (deterministisch und Quantile des stochastischen Modells)**

Bei den Darstellungen in Abbildung 24 und Abbildung 25 ist zu beachten, dass hier die mittlere Lebenserwartung einer ganzen Rentnergenerationen (in Abhängigkeit vom Geburtsjahrgang) dargestellt wurde. Für einen konkreten Rentnerbestand besteht zusätzlich noch das *idiosynkratische Risiko*, dass nämlich aufgrund der geringen Anzahl des Bestandes die

beobachtete Lebenserwartung von der der Gesamtbevölkerung abweicht. Je kleiner der Bestand ist, desto ausgeprägter ist das idiosynkratische Risiko.

Zur Veranschaulichung betrachten wir drei unterschiedlich große Musterbestände mit gleicher Struktur:

- *BestandXL* –vgl. Abbildung 12 mit 100 000 Personen des Alters 65.<sup>41</sup>
- *BestandL*: gleiche Struktur wie *BestandXL*, jedoch mit 10 000 Personen des Alters 65
- *BestandS*: gleiche Struktur wie *BestandXL*, jedoch mit 100 Personen des Alters 65.



**Abbildung 26: Struktur des hybriden Musterbestandes (Bestand XL) für die Simulation**

Zur Illustration des *idiosynkratischen* und des *systematischen Risikos* simulieren wir jeweils 20 Simulationspfade für die nächsten 50 Jahre. Das idiosynkratische Risiko wird durch die drei unterschiedlich großen Bestände abgebildet und das systematische Risiko durch unterschiedliche Niveaus von  $\sigma_\alpha$  (0%, 2% und 4%).

Abbildung 27 stellt die Simulation der Bestandsentwicklung (einschl. Neuzugang) für 50 Jahre für die Bestände *BestandXL*, *BestandL* und *BestandS* für verschiedene Niveaus von  $\sigma_\alpha$  dar. Die gebrochene Linie zeigt jeweils die deterministische Hochrechnung, wenn man die Rechnungsgrundlagen der Richttafeln 2005G zugrunde legt. Abbildung 27 zeigt somit, dass für den großen und mittelgroßen Bestand (*BestandXL* und *BestandL*) das idiosynkratische Risiko vernachlässigbar ist. Lediglich bei dem kleinen Bestand (*BestandS*) sind für  $\sigma_\alpha = 0$  Abweichungen der einzelnen Simulationspfade erkennbar. Andererseits wird deutlich, welche Auswirkungen das systematische (nicht diversifizierbare) Risiko hat.

<sup>41</sup> Die Anzahl der Personen der übrigen Altersgruppen wurde so festgelegt, dass der Bestand ohne Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung im steady-state Zustand wäre.

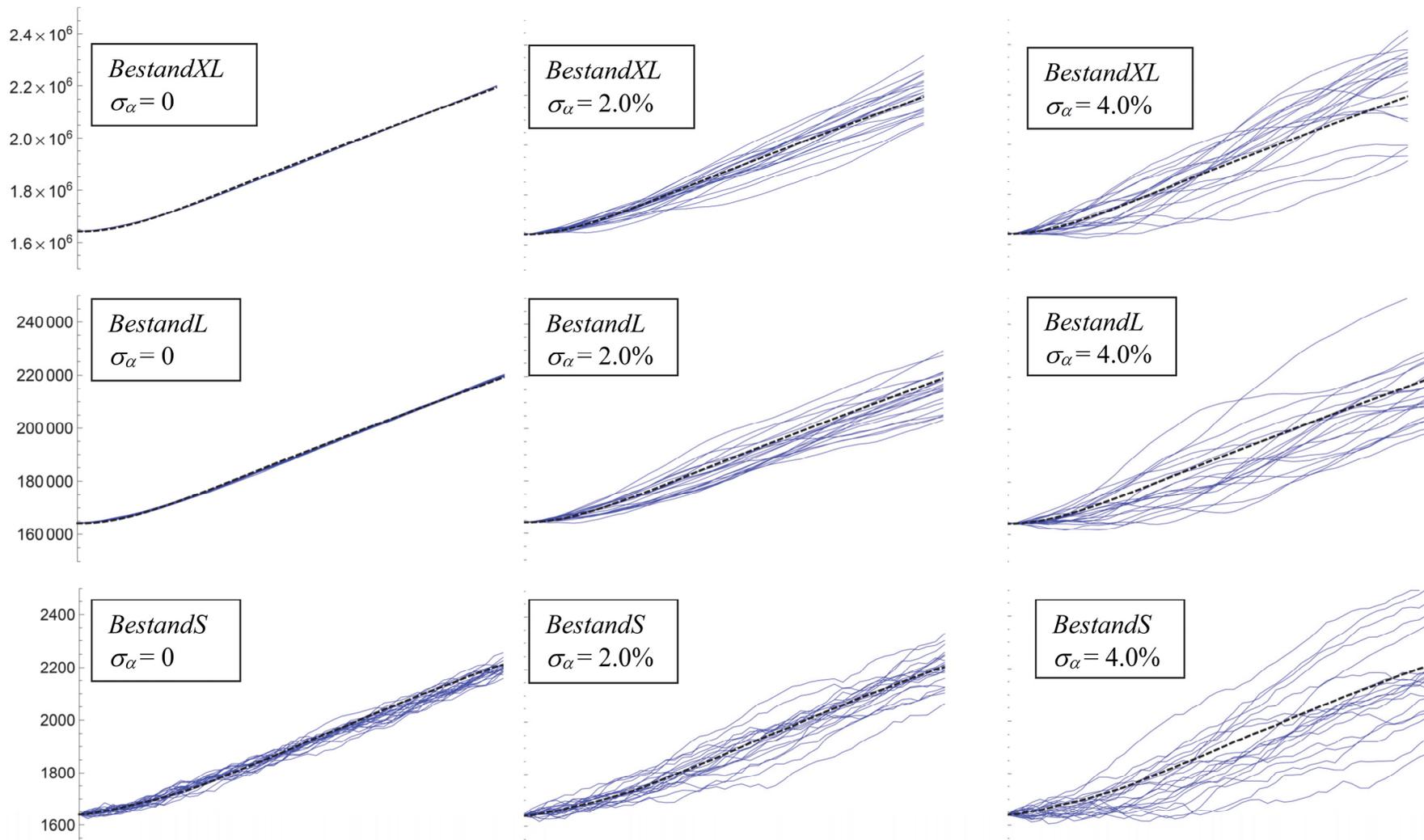


Abbildung 27: Simulation der Bestandsentwicklung

### 3.2.2 Das Kapitalmarktmodell

Für den Kapitalmarkt unterstellen wir ein einfaches *Black-Scholes Modell*. Dies bedeutet, dass für die Asset-Allokation eine sichere Kapitalanlage („Bonds“) und eine risikobehaftete Kapitalanlage („Aktienanlage“) zur Verfügung stehen. Beide Anlagen können beliebig gemischt werden, Transaktionskosten der Assetallokation werden vernachlässigt.

Modellierung der Kapitalanlagen:

$$\text{sichere Anlage: } \frac{dA(t)}{A(t)} = \bar{\mu} dt, \text{ hierbei ist } \bar{\mu} \text{ der sichere Zins (Zinsintensität)}$$

$$\text{Aktienanlage: } \frac{dS(t)}{S(t)} = (\bar{\mu} + r_M \sigma_M) dt + \sigma_M dW_t$$

Für die folgenden Simulationsrechnungen verwenden wir die Kalibrierung:

$$\bar{\mu} = \mu = 0.02, r_M = 0.25, \sigma_M = 0.2$$

Die Asset-Managerin legt zu Beginn jeden Jahres die *Risikoexposition*  $\sigma(t) \in [0, \sigma_M]$  für das Folgejahr fest. Das Verhältnis  $\sigma(t) / \sigma_M$  können wir als *Aktienquote* interpretieren.<sup>42</sup> Bei einer Risikoexposition von  $\sigma(t)$  für den Zeitraum  $[t, t + 1]$  beträgt die *erwartete Rendite* des Portfolios  $\bar{\mu} + r_M \sigma(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t)$ .

### 3.2.3 Darstellung der Asset-Liability Strategie

In unserem Modell unterstellen wir, dass der Pensionsfonds zur Steuerung der Kapitalanlagen und der Verpflichtungen zu Beginn jeden Jahres zweierlei festlegt:

- die *Asset-Allokation* durch Festlegung der Risikoexposition  $\sigma(t)$  am Kapitalmarkt
- die *Renten Anpassung*  $\varepsilon(t) := \ln(r_{t+1} / r_t)$ . Hierbei unterstellen wir, dass die Renten Anpassung erst zum Zeitpunkt  $t+1$  erfolgt. Die Renten Anpassung stellt also eine *Vorausdeklaration* dar, denn die Veränderungen der Sterblichkeit und die Entwicklung des Kapitalmarktes innerhalb des Jahres  $[t, t + 1]$  haben keinen Einfluss auf die ab  $t+1$  fällig Rente.

Auf Grundlage der Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $t$  werden zu Beginn des Jahres  $[t, t+1]$  die Deckungsrückstellungen für den gesamten Rentenbestand ermittelt. Die Gesamtdeckungsrückstellung sei mit  $V(t)$  bezeichnet. Die Berechnung erfolgt auf Grundlage eines festen Rechnungszinses  $\mu = \bar{\mu} = 0.02$  und der aktuellen Generationentafeln, sowie unter

---

<sup>42</sup> Wir unterstellen in dem Modell, dass das Verhältnis von sichere Anlage und Aktienanlage innerhalb des jährlichen Anlagehorizontes wertmäßig stets konstant ist. Diese Constant-Mix-Strategie verlangt allerdings ein permanentes Umschichten von sicherer Anlage und Aktienanlage.

Berücksichtigung des aktuellen Rentenniveaus  $r_t$ . Die Deckungsrückstellung  $V(t)$  wird verglichen mit  $P(t)$ , dem (Zeit-) Wert der Kapitalanlagen zu Beginn des Jahres  $[t, t+1]$ . Wir setzen

$$\rho(t) := \ln\left(\frac{P(t)}{V(t)}\right)$$

und bezeichnen dies als die (*logarithmische*) *Reservequote*. Man beachte, dass

$$\rho(t) = 0 \Leftrightarrow P(t) = V(t) \text{ und } \frac{P(t) - V(t)}{P(t)} \leq \rho(t) \leq \frac{P(t) - V(t)}{V(t)}.$$

Die Asset-Liability Strategie bestehe nun darin, die (log.) Reservequote möglichst auf dem Niveau einer vorgegebenen *Zielreservequote*  $\rho_{Ziel}$  zu halten. Ferner wird eine *Ziel-Risikoexposition*  $\sigma_{Ziel}$  am Kapitalmarkt angestrebt. Die Größen  $\rho_{Ziel}$  und  $\sigma_{Ziel}$  können wir als *strategische* ALM – Zielgrößen bezeichnen. Die Festlegung der tatsächlichen Risikoexposition und der Rentenanpassung können wir als *taktische* ALM-Entscheidung bezeichnen.

Die taktische ALM-Entscheidung hängt davon ab, inwieweit die tatsächliche von der Zielreservequote abweicht. Wir wählen daher  $u(t) := \rho(t) - \rho_{Ziel}$  als (stochastische) Kontrollvariable. Die *taktische* ALM-Entscheidung lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$\text{taktische Asset Allokation: } \sigma(t) := \sigma_{Ziel} + a(u(t))$$

$$\text{Rentenanpassung: } \varepsilon(t) := \bar{\mu} + \sigma(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) - \mu + \theta(u(t)),$$

wobei  $a(u)$  und  $\theta(u)$  reellwertige Funktionen darstellen.

Wir betrachten im Folgenden nur den Spezialfall  $a(u) \equiv 0$ . In diesem Fall können wir von einer *reinen Liability Management Strategie* sprechen, da hierbei nur die Verbindlichkeiten gesteuert werden. Wir haben dann folgende Darstellung  $\sigma(t) \equiv \sigma_{Ziel}$  und

$$\varepsilon(t) := \bar{\mu} + \sigma_{Ziel} - \frac{1}{2}\sigma_{Ziel}^2 - \mu + \theta(u(t)).$$

Bei der Regel zur Rentenanpassung ist zu beachten, dass  $\bar{\mu} + \sigma_{Ziel} - \frac{1}{2}\sigma_{Ziel}^2$  die erwartete Portfoliorendite darstellt. Somit ist  $\bar{\mu} + \sigma_{Ziel} - \frac{1}{2}\sigma_{Ziel}^2 - \mu$  die *erwartete Überrendite*.

Ist dann  $\theta(u(t)) = 0$ , so wird die Überrendite für die Finanzierung der Rentenanpassung verwendet. Falls  $u(t) = \rho(t) - \rho_{Ziel} < 0$ , wenn also die aktuelle Reservequote hinter die Zielreservequote zurückfällt, wird man plausiblerweise annehmen, dass ein Teil der Überrendite zur Stärkung der Reserveposition verwendet wird, dass also  $\theta(u(t)) < 0$ .

Zur formalen Darstellung der Funktion  $u \mapsto \theta(u)$  sind einige Definitionen erforderlich:

$a(x, t, s)$ : Barwert einer Leibrente (jährlich vorschüssig) für eine zum Zeitpunkt  $t$   $x$ -jährige Person; die Berechnung beruht auf Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $s$ . Wir unterstellen einen gleichbleibenden Rechnungszins  $\mu$ .

$L_x(t)$ : Anzahl der zum Zeitpunkt  $t$   $x$ -jährigen Personen des Rentenbestandes für  $z \leq x \leq \omega$

$L(t) := \sum_{x=z}^{\omega} L_x(t)$ : Gesamtzahl der Rentner zum Zeitpunkt  $t$

$V(t) := r_t \sum_{x=z}^{\omega} a(x, t, t) L_x(t)$ : zum Zeitpunkt  $t$  berechnete Deckungsrückstellung, basierend auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $t$ .

$P(t)$ : Zeitwert des Portfolios zum Zeitpunkt  $t$  – nach Zugang der Neurentner und vor Auszahlung der fälligen Renten.

$EP(t) = f r_t a(z, t, t-1) L_z(t)$ : Einmalbeitrag der zum Zeitpunkt  $t$  in das Rentenkollektiv eintretende Generation von Neurentner. Man beachte, dass die Einmalprämie auf Grundlage des Rentenbarwertes berechnet wird, der die Sterblichkeitsentwicklung bis zum Zeitpunkt  $t-1$  berücksichtigt. Den Faktor  $f$  können wir als Sicherheitsfaktor interpretieren – wir unterstellen  $f \geq 1$ . Da wir einen deterministischen Neuzugang unterstellen und bereits zum Zeitpunkt  $t-1$  die Rentenhöhe  $r_t$  festgelegt wird, kann  $EP(t)$  bereits zum Zeitpunkt  $t-1$  bestimmt werden.

Von einem *rechnungsmäßigem Verlauf* wollen wir sprechen, wenn die tatsächliche Sterblichkeitsentwicklung der erwarteten entspricht und wenn die tatsächliche Portfoliorendite der erwarteten entspricht. Entsprechend bezeichnen wir mit  $P^{(e)}(t+1)$  bzw.  $V^{(e)}(t+1)$  den Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $t+1$  bei rechnungsmäßigem Verlauf; die Berechnung erfolgt auf Grundlage der Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $t$ . Entsprechend bezeichnen wir

$$\rho^{(e)}(t+1) := \ln \left( \frac{P^{(e)}(t+1)}{V^{(e)}(t+1)} \right)$$

als die „erwartete“ Reservequote bei rechnungsmäßigem Verlauf. Hierbei ist zu beachten, dass im Allgemeinen  $\mathbf{E}(\rho(t+1) | \rho(t)) \neq \rho^{(e)}(t+1)$ .

Des Weiteren definieren wir einige Kenngrößen, die die Struktur des Bestandes charakterisieren.

$\lambda_t := \frac{r_t L(t)}{V(t)}$ : Die Liquiditätsquote gibt an, welcher Anteil der Verpflichtungen sofort fällig ist.

$v_t := \frac{r_{t+1} L_z(t+1) a(z, t+1, t)}{V^{(e)}(t+1)}$ : Anteil des Neuzugangs an der erwarteten Deckungsrückstellung

$\xi_t := \ln\left(\frac{V^{(e)}(t+1)}{V(t)}\right) - \varepsilon(t)$ : Wachstum der Verpflichtungen, neutralisiert um die Rentenanpassung.

Setzt man nun  $\theta_t(\alpha, u) := \ln\left(\frac{1 - v_t \frac{\exp(\rho_{Ziel} + u) - \lambda_t}{1 - \lambda_t \exp(\rho_{Ziel} + (1 - \alpha)u) - f v_t}}{1 - \lambda_t \exp(\rho_{Ziel} + (1 - \alpha)u) - f v_t}\right)$ ,  $\sigma(t) \equiv \sigma_{Ziel}$  und

$$\varepsilon(t) := \bar{\mu} + \sigma_{Ziel} r_M - \frac{1}{2} \sigma_{Ziel}^2 - \mu + \theta_t(\alpha, u(t)),$$

so gilt:

$$\rho^{(e)}(t+1) = \rho(t) - \alpha(\rho(t) - \rho_{Ziel}) \text{ und}$$

$$\rho(t+1) = \alpha \rho_{Ziel} + (1 - \alpha)\rho(t) + X_{t+1} - Y_{t+1} \text{ mit den stochastischen Termen}$$

$$X_{t+1} = \ln\left(\frac{P(t+1)}{P^{(e)}(t+1)}\right) \text{ und } Y_{t+1} = \ln\left(\frac{V(t+1)}{V^{(e)}(t+1)}\right).$$

Somit hat der stochastische Prozess  $\rho(t)$  die *mean-reverting* Eigenschaft. Die Störterme  $X_{t+1}$  und  $Y_{t+1}$  verschwinden bei einem rechnermäßigen Verlauf. Bei einem rechnermäßigen Verlauf verkürzt sich der Abstand zwischen *Ist-* und *Zielreserve* um den Faktor  $\alpha$ . Der Faktor  $\alpha$  steuert somit die Intensität, mit der die laufenden Renten an die geänderte Reservesituation angepasst wird; wir können  $\alpha$  also als *Anpassungsgeschwindigkeit* interpretieren.

### 3.3 Simulationsrechnungen

Auf der Grundlage des obigen Modells führen wir Simulationsrechnungen durch. Als Anfangsbestand wählen wir den oben beschriebenen *BestandXL* und unterstellen einen gleichbleibenden (deterministischen) Neuzugang von  $L_z(t) = 100000$  für den gesamten Hochrechnungszeitraum von  $n = 50$  Jahren.

### 3.3.1 Spezialfall: Risikolose Kapitalanlage ( $\sigma_{Ziel} = 0$ )

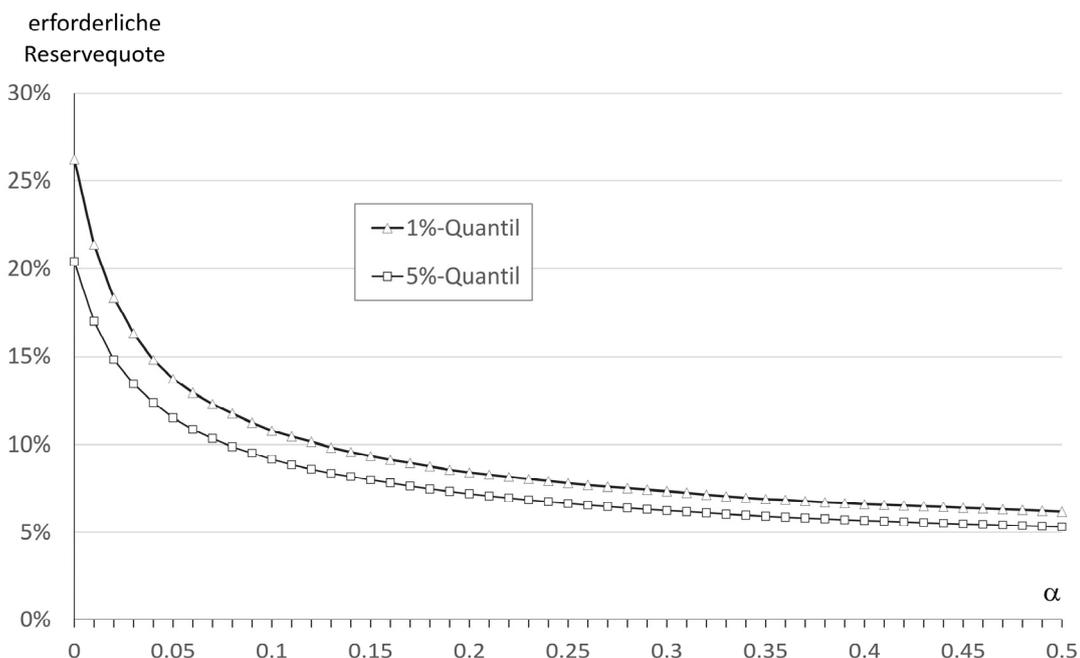
Wir betrachten zunächst den Fall  $\sigma_{Ziel} = 0$ , d.h. wir klammern zunächst das Kapitalanlage-risiko aus.

Wir legen bei den Berechnungen folgende Annahmen zugrunde:

$$\mu = \bar{\mu} = 0.02, f = \exp(\rho_{Ziel}) \text{ und } \rho(0) = \rho_{Ziel}.$$

Der Rechnungszins entspricht also der Portfoliorendite und die Generation der Neurentner zahlt einen Sicherheitszuschlag entsprechend der Zielreservequote. Dieser Sicherheitszuschlag trägt also zur Stabilisierung der Reservequote bei.

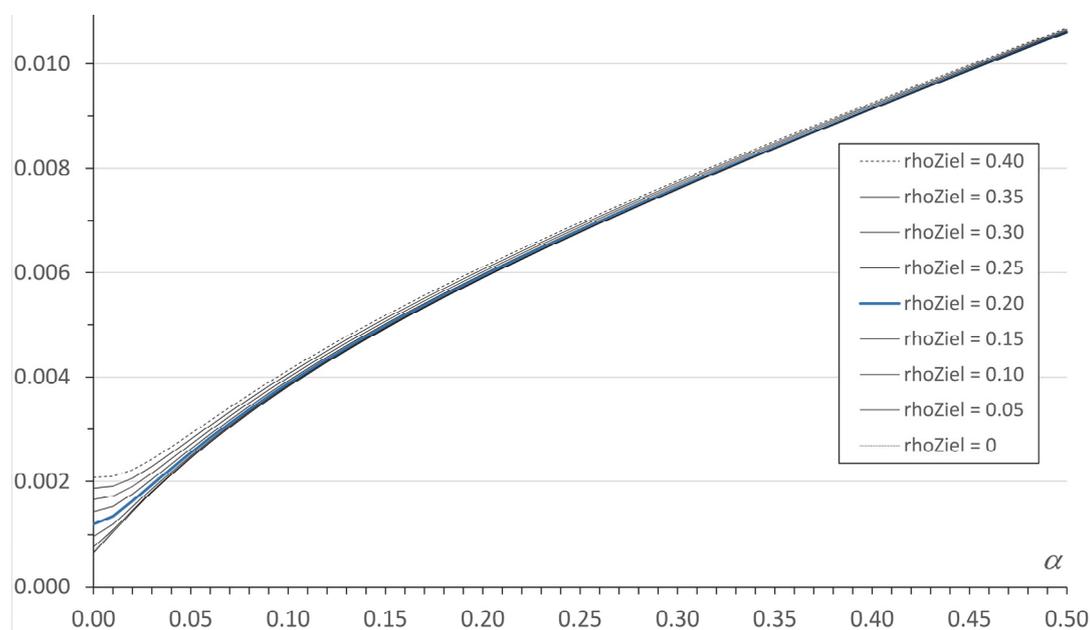
Zunächst untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der Zielreservequote und dem Anpassungsparameter  $\alpha$  in Bezug auf die „Ruinwahrscheinlichkeit“. Von Ruin wollen wir sprechen, wenn zu irgendeinem Zeitpunkt  $V(t) > P(t)$ . Die folgende Abbildung zeigt, bei welchen Kombinationen  $(\alpha, \rho_{Ziel})$  die Ruinwahrscheinlichkeit ein Niveau von 1% bzw. 5% in 50 Jahren nicht übersteigt.



**Abbildung 28: 1% und 5%-Quantile für die Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit  $\alpha$  und der erforderlichen Reservequote. Ausgewertet wurden jeweils 10 000 Simulationsläufe.**

Den Parameter  $\alpha$  können wir als Risikomaß für die Stabilität der Rente interpretieren. Ist nämlich  $\alpha=0$ , sind die Renten konstant; mit steigendem  $\alpha$  nimmt auch die Volatilität der Rentenzahlungen zu. Die Abbildung zeigt somit die risikoabsorbierenden Eigenschaft der kollektiven Reserve; je höher die Start- bzw. Zielreservequote ist, desto stabiler kann man die Renten halten.

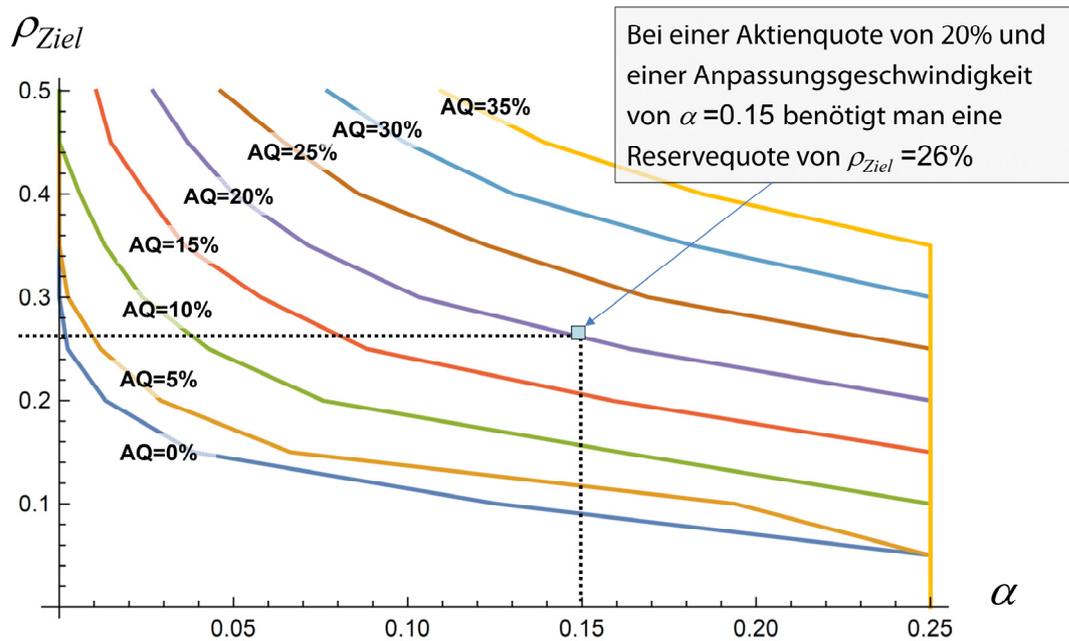
Die Abbildung 29 zeigt den funktionalen Zusammenhang von Anpassungsgeschwindigkeit  $\alpha$  und der Volatilität der Rentenanpassungen. Dies rechtfertigt die Interpretation von  $\alpha$  als Risikokennzahl für die Rentenstabilität.



**Abbildung 29: Die Volatilität der Rentenanpassung in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit  $\alpha$**

### 3.3.2 Der allgemeine Fall: Risikobehaftete Kapitalanlage ( $\sigma_{Ziel} > 0$ )

Falls  $\sigma_{Ziel} > 0$  so beeinflusst zusätzlich das Kapitalanlagerisiko die Bilanz des Pensionsfonds. Die folgende Abbildung (Abbildung 30) folgt der Darstellung in Abbildung 28, allerdings werden die Simulationsrechnungen für verschiedene Aktienquoten (AQ = 0%, 5%, 10, ..., 35%, diese Aktienquoten entsprechen  $\sigma_{Ziel} = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.07$ ) durchgeführt.



**Abbildung 30: 5%-Quantile für die Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit  $\alpha$  und der erforderlichen Reservequote  $\rho_{Ziel} = \rho(0)$ . Ausgewertet wurden jeweils 1 000 Simulationsläufe**

Vergleicht man die Abbildung 28 und Abbildung 30, so sieht man, dass das Kapitalanlage- risiko zumindest in Bezug auf die Ruinwahrscheinlichkeit stärkeren Einfluss hat als das Langlebigkeitsrisiko. Der fundamentale Unterschied ist jedoch, dass das Kapitalanlage- risiko durch Wahl der Risikoexposition gesteuert werden kann. Die Modellrechnungen legen nahe, dass eine Aktienquote von über 20% eine sehr hohe Reservequote erfordert. Bei diesen Berechnungen ist jedoch zu berücksichtigen, dass ein reines Liability-Management unterstellt wurde, dass also die Risikoexposition nicht an die Reservesituation angepasst wird.

### 3.4 Resümee

Untersucht wurde die Frage, wie ein reiner Rentenbestand in Bezug auf das Langlebigkeitsrisiko gesteuert werden kann. Bei Rentenbeginn muss der Aktuar (oder die Aktuarin) unter Berücksichtigung aller verfügbaren Informationen berechnen, welcher Kapitalbetrag erforderlich ist, um hieraus eine lebenslängliche Renten für den Einzelnen bzw. für die Generation der Neurentner zu finanzieren. Bei dieser Berechnung fließen insbesondere Annahmen hinsichtlich der künftigen Sterblichkeit ein. Da jedoch die tatsächliche Sterblichkeit von der erwarteten abweicht, stellt sich die Frage, wie diese Abweichungen ausgeglichen werden können. Das hier vorgestellte Modell sieht eine Steuerung des Langlebigkeitsrisikos über entsprechende Rentenanpassungen vor. Wenn die tatsächliche Lebenserwartung systematisch unterschätzt wurde, so muss dies durch systematisch niedrigere Rentenanpassungen ausgeglichen. Umgekehrt führt eine Überschätzung der Lebenserwartung dazu, dass die entsprechende Rentengeneration mehr eingezahlt hat als

erforderlich. Eine systematische Überdotierung muss durch systematisch höhere Rentenanpassungen ausgeglichen werden. Stets führen also Abweichungen zwischen erwarteter und tatsächlicher Lebenserwartung zur Notwendigkeit, die Renten entsprechend anzupassen.

Wir stellen ein Modell vor, wie diese Rentenanpassungen *generationengerecht* durchgeführt werden kann. Modellrechnungen zeigen, dass ein moderat großer Bestand das Langlebigkeitsrisiko absorbieren kann.

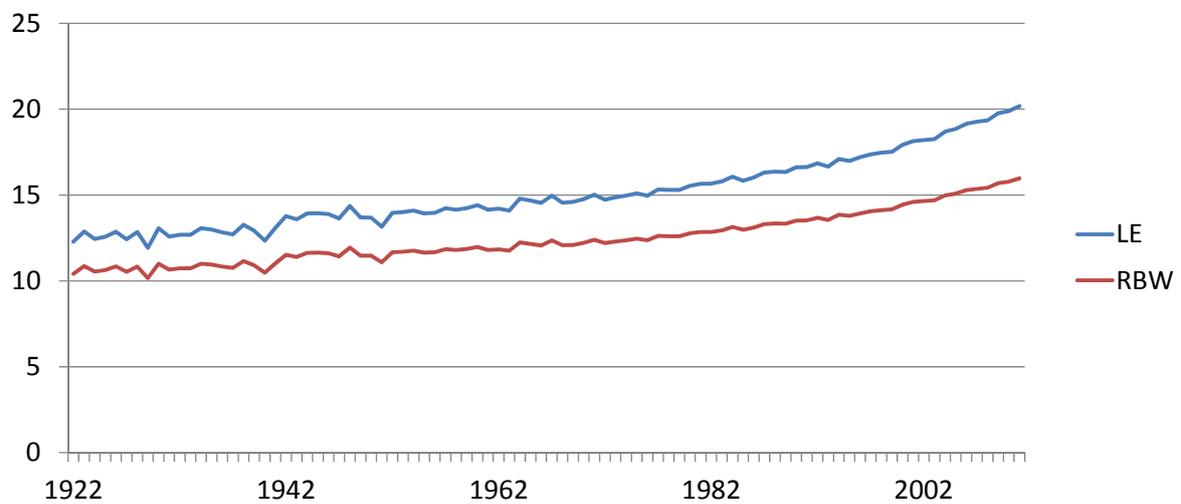
## 4 Langlebigkeit, quo vadis?

*Cord-Roland Rinke*

Für den Transfer von Langlebigkeitsrisiken in Versicherungs- und Kapitalmärkte gibt es unterschiedliche Lösungsansätze, die nachfolgend erläutert werden.

### 4.1 Einleitung

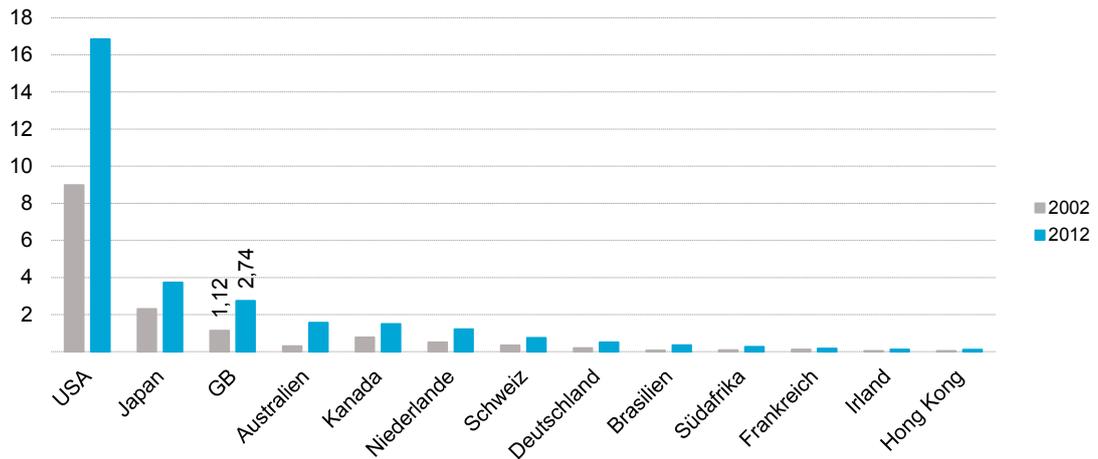
Die Lebenserwartungen und damit einhergehend die Rentenfaktoren haben sich fast überall in der Welt deutlich erhöht, siehe dazu die Abbildung 31 mit den Werten für Großbritannien (beide Geschlechter) in Jahren.



**Abbildung 31: Lebenserwartung und Rentenfaktoren (m/w) in GB <sup>43</sup>**

Die weltweiten Kapitalanlagen zur Bedeckung von Renten und Pensionen sind auf 78% des BIP der nachfolgend genannten Länder gestiegen.

<sup>43</sup> Quelle: Eigene Berechnung unter Verwendung der HMD-Daten und einem Zinssatz von 2%.



**Abbildung 32: Kapitalanlagen zur Bedeckung von Renten & Pensionen in Billionen USD<sup>44</sup>**

Die Werte von Deutschland in der Abbildung 32 sind deshalb so niedrig, weil es in Deutschland immer noch eine hohe staatliche Vorsorge gibt und weil ein großer Teil von Renten und Pensionen als Direktzusagen gehandhabt werden und somit nicht durch (echte) Kapitalanlagen bedeckt sind.

## 4.2 Langlebkeitsrisiken

Pensionsfonds haben im Wesentlichen drei Optionen, das Langlebkeitsrisiko zu handhaben, wobei die Präferenzen für die einzelnen Lösungen vom Marktumfeld abhängen.

### **Buy-out**

Vermögenswerte und Verbindlichkeiten der Pensionsfonds werden an eine Versicherungsgesellschaft übertragen. Die Versicherungsunternehmen übernehmen die Verantwortung für die übertragenen Risiken und gehen eine direkte Vertragsbeziehung mit den Rentnern/Pensionären ein

### **Buy-in**

Der Pensionsfond investiert das Vermögen in eine Versicherung, wobei das das Langlebkeitsrisiko an eine Versicherungsgesellschaft übertragen wird. Der Pensionsfond bleibt gegenüber dem Pensionär Vertragspartner.

### **Longevity Swap**

Es erfolgt ein regelmäßiger Austausch von Prämien und Rentenzahlungen; der Pensionsfond behält die Vermögenswerte und bleibt gegenüber dem Pensionär Vertragspartner.

<sup>44</sup> Quelle: Towers Watson: Global Pensions Asset Study 2013.

Dabei gibt es verschiedene Arten von Langlebighkeitsrisiken: Einerseits die **heutige** Sterblichkeit, wobei Erfahrungsanalysen einen Hinweis auf die heutige Sterblichkeit für ein bestimmtes Portefeuille geben. Detaillierte Analysen sind allerdings nur möglich, wenn genügend Daten zur Verfügung stehen; sonst könnte ein sozioökonomisches Muster für kleinere Portfolios übersehen werden.

Andererseits die **zukünftige** Sterblichkeit, wobei die Verbesserungen sehr unbeständig sind und es viele verschiedene Meinungen darüber gibt, wie sich die Sterblichkeitsverbesserungen in der Zukunft entwickeln werden. Zusätzliche Risiken stellen **Nebenleistungen** wie Hinterbliebenen-Rente, Eskalationen, Umwandlungen und ähnliches dar.

Man unterscheidet dabei zwischen dem **systematischen** Langlebighkeitsrisiko, d. h. dem Langlebighkeitsrisiko, das auch bei der Betrachtung großer Portefeuilles von Personen nicht mehr durch Diversifikation reduziert werden kann (z. B. weltweite Trends oder Wintersterblichkeit) und dem **unsystematischen** Langlebighkeitsrisiko, d. h. dem Langlebighkeitsrisiko, das durch Hinzunahme weiterer Risiken durch Diversifikation relativ klein wird und schließlich bei großen Kollektiven verschwindet (z. B. Tod durch Unfall).

In der Tabelle 3 sind die wichtigsten Risiken bei der Altersvorsorge aufgelistet und spezifiziert, welche Risiken wie transferiert werden können:

| Altersvorsorge                           | Versicherer / Rückversicherer | Kapitalmarkt / Investor        |
|--|-------------------------------|--------------------------------|
| Regulatorische Änderungen, Datenqualität |                               |                                |
| Sterblichkeitsrisiko                     | Sterblichkeitsrisiko          | Sterblichkeitsrisiko           |
| – systematisch                           | – unsystematisch              | – systematisch                 |
| – unsystematisch                         | ○ Höhe der Basissterblichkeit | ○ Sterblichkeitsverbesserungen |
|  | ○ Form der Sterbetafel        | ○ Saisonalität                 |
|  | ○ Zufall                      |                                |
| Nebenleistungen                          | Nebenleistungen               |                                |
|  | – Hinterbliebene              |                                |
|  | – Sonderleistungen            |                                |
| Kapitalmarktrisiken                      |                               | Kapitalmarktrisiken            |
|  |                               | – Kapitalanlagerisiken         |
|  |                               | – Inflationsrisiken            |

**Tabelle 3: Wichtige Risiken bei der Altersvorsorge**

Was die „Träger“ von Langlebigkeitsrisiken betrifft, so haben viele Industrieländer ein Rentensystem bestehend aus

- staatliche Renten mit Regierungen/Gemeinden als Trägern,
- Betriebsrenten mit Arbeitgebern/Unternehmen als Trägern sowie
- private Renten mit Lebensversicherungen als Trägern.

Unternehmen und Pensionsfonds versuchen Teile ihrer Risiken abzugeben, die in den Verbindlichkeiten stecken. Dabei haben Schadenversicherer ein Langlebigkeitsrisiko aus Structured Settlements und Investoren ein Langlebigkeitsrisiko aus Life Settlements.

Erhebliche Langlebigkeitsrisiken werden derzeit außerhalb der Versicherungsbranche gehalten.

### 4.3 Sterblichkeitsverbesserungen

Die Sterblichkeitstrends können in eine Periodenkomponente, eine Alterskomponente und eine Kohortenkomponente zerlegt werden, siehe dazu das Beispiel in der Abbildung 33 mit einem „Heat Chart“ mit den Effekten für männliche Amerikaner.

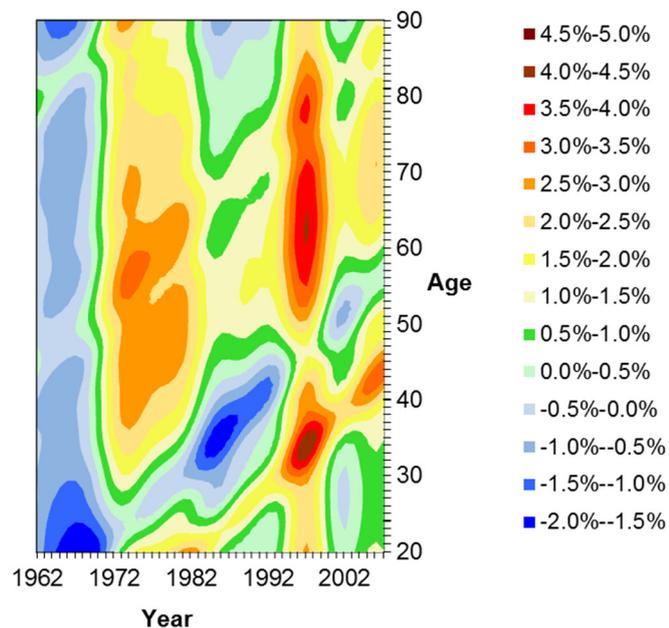


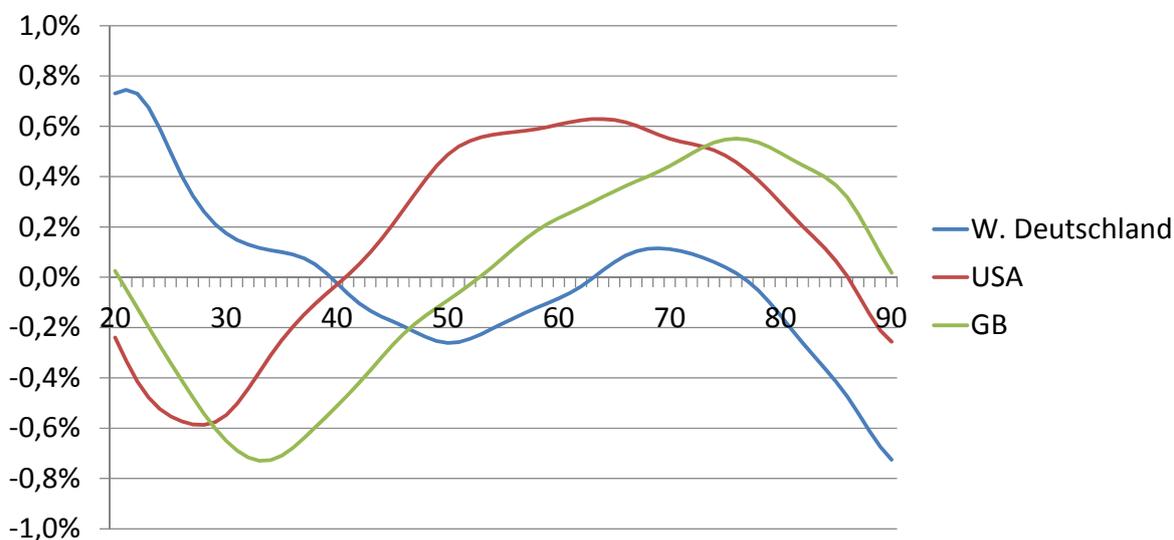
Abbildung 33: Sterblichkeitsverbesserungen für männliche Amerikaner

Die Modellierung der Sterblichkeitsverbesserung kann mit dem Age-Period-Cohort (APC) Modell wie folgt vorgenommen werden:

$$i(x, t) = a(x) + b(t) + c(t - x),$$

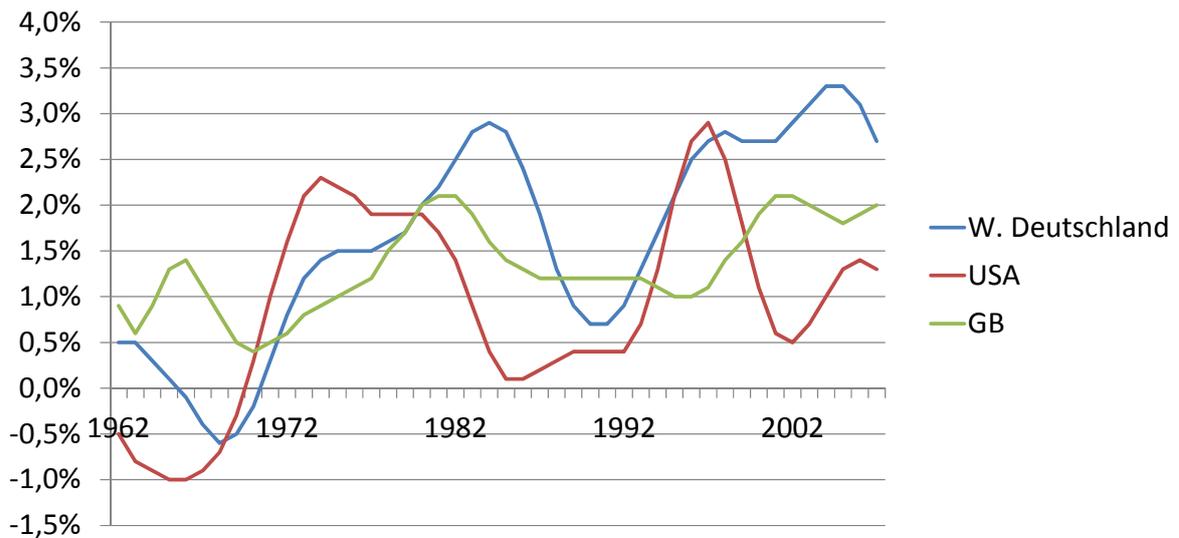
wobei  $a(x)$  die Alterskomponente,  $b(t)$  die Periodenkomponente und  $c(t - x)$  die Kohortenkomponente darstellt. Das APC Modell ist die Basis für die Projektion von Sterblichkeitsverbesserungen in Großbritannien.

In den Abbildung 34, Abbildung 35 und Abbildung 36 werden die Muster der Sterblichkeitsverbesserungen für Westdeutschland, die USA und Großbritannien mit einander verglichen (wobei die Beschränkung auf Westdeutschland in der längeren Datenhistorie begründet ist).



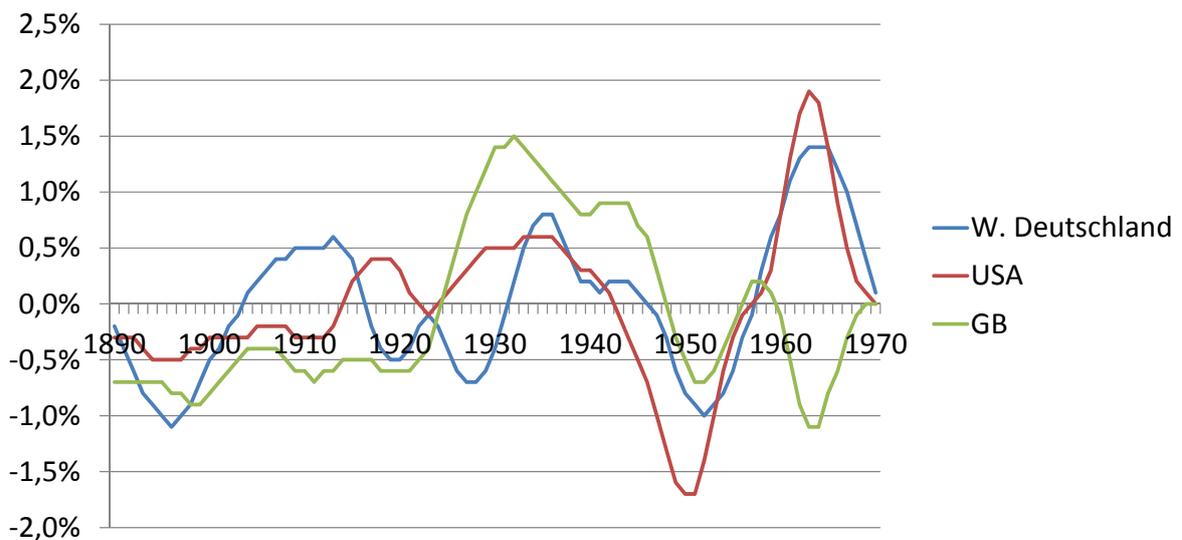
**Abbildung 34: Alterskomponenten in D (West), USA und GB**

Bei den Alterskomponenten verhalten sich die Muster in den USA und Großbritannien etwa ähnlich; die größten Verbesserungen gibt es in den älteren (rentennahen oder rentenbeziehenden) Altersgruppen.



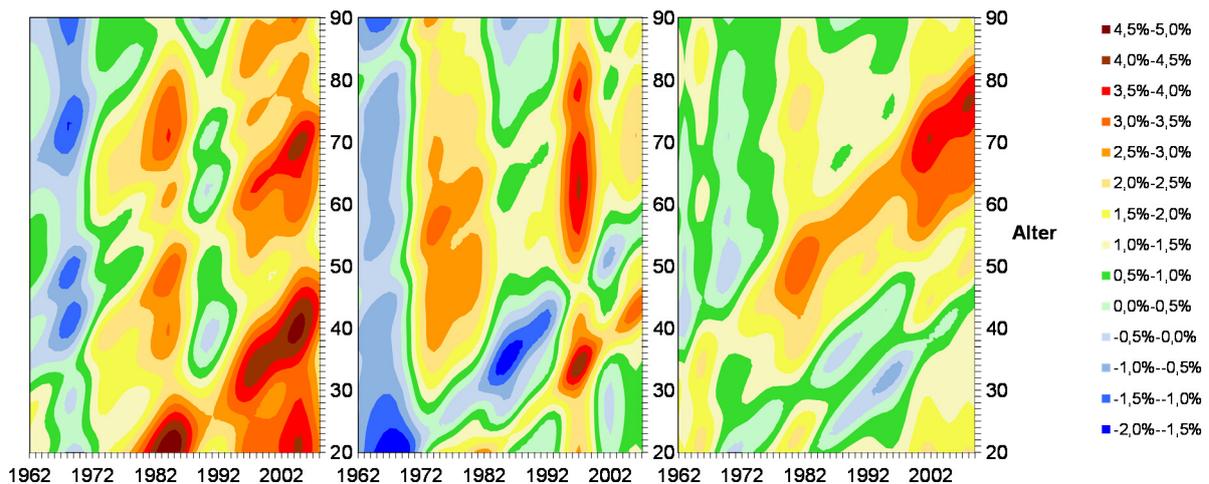
**Abbildung 35: Periodenkomponenten in D (West), USA und GB**

Die Periodenkomponenten weisen in allen drei betrachteten Ländern eine eher unsystematische Struktur auf.



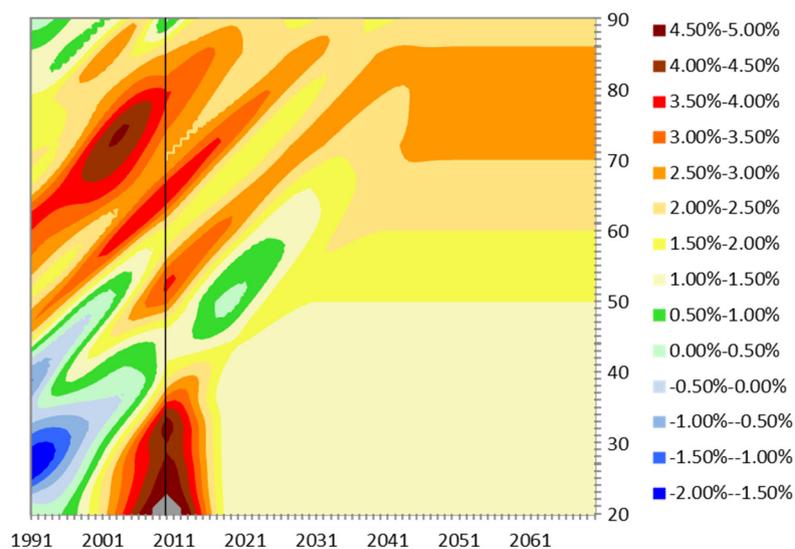
**Abbildung 36: Kohortenkomponenten in D (West), USA und GB**

Die analoge Aussage gilt für die Kohorteneffekte. Auffallend sind in allen Ländern sogenannte „goldene“ Kohorten. In der Abbildung 37 sind die „Heat Charts“ mit allen Effekten für die drei betrachteten Länder gegenübergestellt.



**Abbildung 37: Alle Komponenten in D (West), USA und GB**

In der Abbildung 38 ist eine Trend Projektion (über die letzte Sterbetafel hinaus) mit dem Tool CMI\_2013 illustriert:



**Abbildung 38: Historischer & projizierter Trend für Männer in GB**

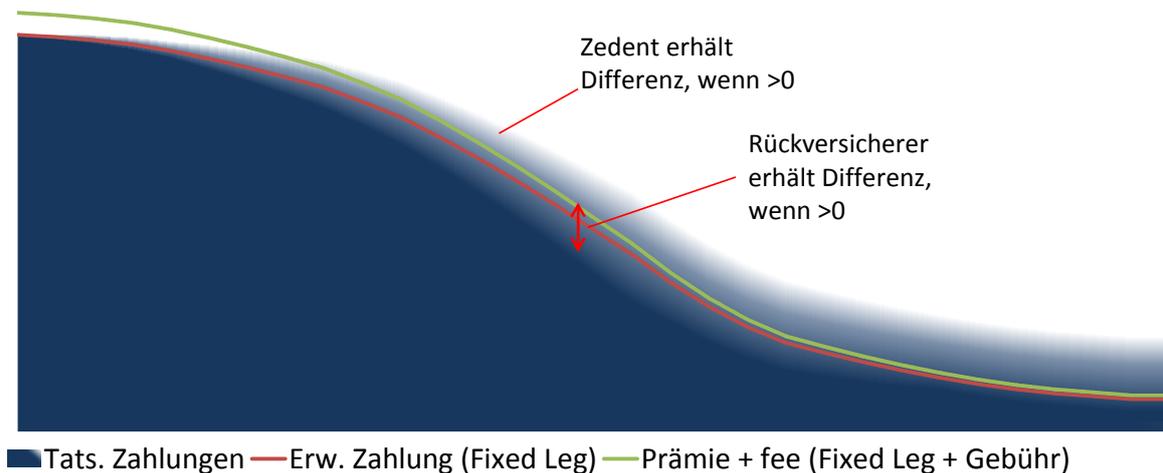
Die Trendprojektion fügt sich vergleichsweise „harmonisch“ in die historischen Beobachtungen ein; Kohorteneffekte bleiben weiterhin deutlich erkennbar.

#### 4.4 Longevity Swap

Bei einem Longevity Swap handelt es sich von der Grundidee her um eine Rentenversicherung gegen laufende Beiträge, insbesondere wird eine variable Rentenzahlung (floating leg) gegen eine fixe Rentenzahlung inklusive einer Gebühr (fixed leg) getauscht.

Das EVU leistet dabei die erwartete Rentenzahlung (inklusive der Gebühr als Ausgleich für das abgegebene Risiko) an das RVU, welches die tatsächliche Rentenzahlung übernimmt. Der Ausgleich erfolgt über einen Nettoabgleich der Zahlungsströme.

Dies liefert einen Schutz vor den finanziellen Auswirkungen, wenn die Rentner länger leben als erwartet.

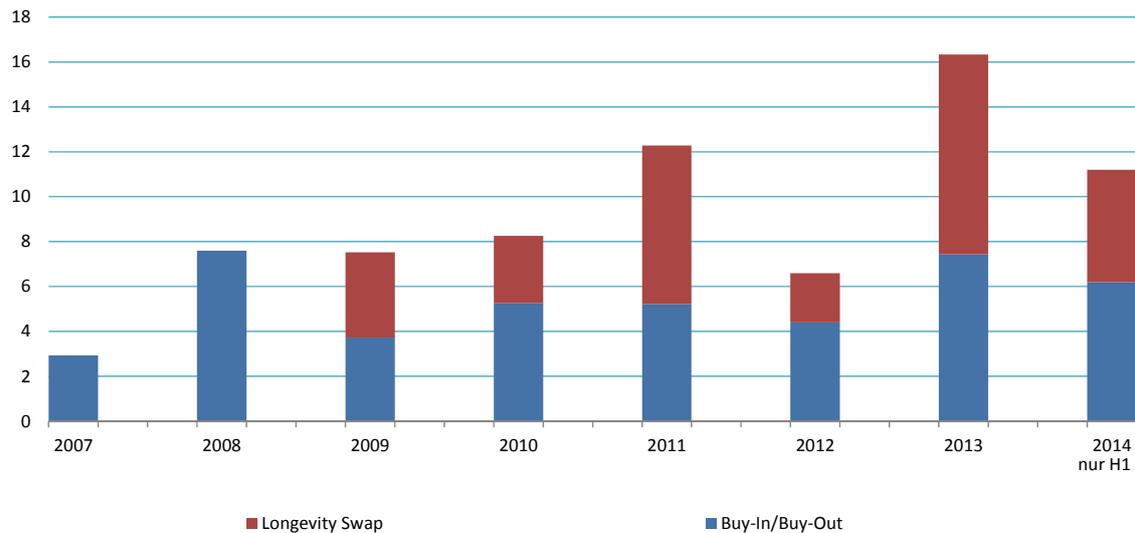


**Abbildung 39: Cash Flow eines Longevity Swaps**

Wichtige Überlegungen bei den Vertragsvereinbarungen sind eine genaue Definition der abgedeckten Leistungen und des Preises (beispielsweise als strukturierte Gebühr oder Pauschalgebühr) sowie die Behandlung von Datenfehlern (mit der Konsequenz von Neuberechnungen der Prämien oder Preisadjustierungen) bei einer ersten Datenbereinigung.

Weiterhin umfassen die Vertragsvereinbarungen Mindestanforderungen an die Verwaltung, Sicherheiten und Kündigungsbestimmungen.

In der Abbildung 40 ist das Marktvolumen für Transaktionen von Rentenblöcken in Großbritannien illustriert.



**Abbildung 40: Buy-Out, Buy-In und Longevity Swaps in Milliarden GBP <sup>45</sup>**

Seit 2008 machen Longevity Swaps in GB einen hohen Anteil am Marktvolumen aus, teilweise von mehr als 50%.

## 4.5 Derivate

Longevity Swaps stellen auf die individuelle Performance eines einzelnen Portfolios ab mit entsprechendem Verwaltungsaufwand. Bei Index-Lösungen werden Forwards auf allgemeine Indizes angeboten, wobei man zwischen

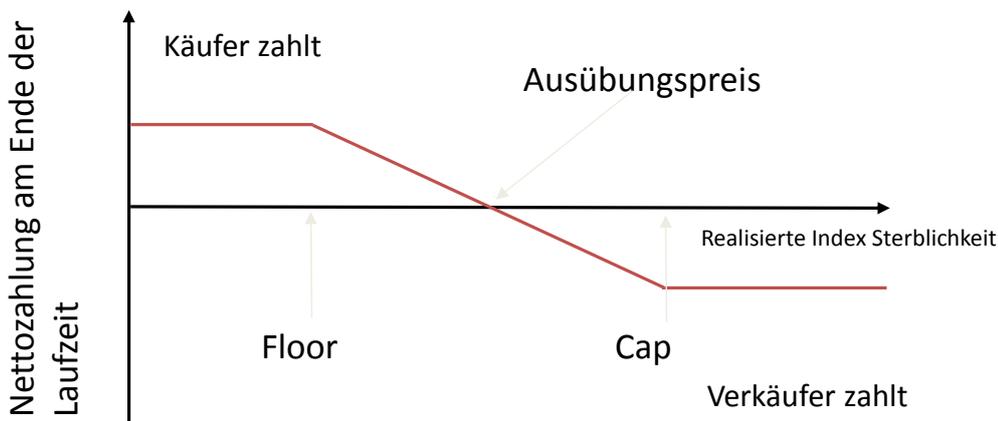
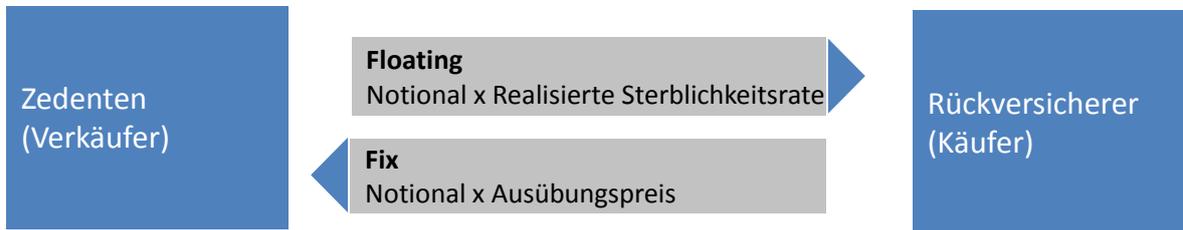
- q-forwards (bezogen auf eine Sterblichkeitsrate) und
- s-forwards (bezogen auf eine Überlebensrate)

unterscheidet.

Ein **q-forward** bezeichnet ein Kapitalmarktinstrument für die Übertragung von Langlebigkeits- oder Sterblichkeitsrisiko durch Austausch in bar der realisierten Sterberate einer Bevölkerung zu einem späteren Zeitpunkt gegen eine feste Sterberate, die zu Beginn vereinbart wurde. Q-forwards sind die Basis, aus der viele andere, komplexere Derivate konstruiert werden können. Ein **s-forward** bezeichnet ein Kapitalmarktinstrument, bei dem ein Austausch in bar der realisierten Überlebensrate einer bestimmten Bevölkerung gegen eine feste Überlebensrate, die zu Beginn vereinbart wurde, erfolgt. Dies definiert einen Grundbaustein für Longevity Swaps, die von Pensionsfonds und (Rück)Versicherern ver-

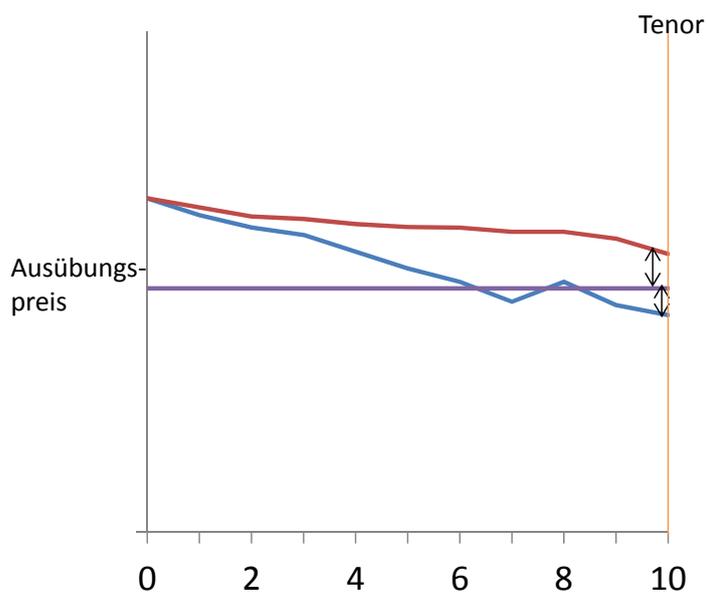
<sup>45</sup> Quelle: LCP Pension Buy-Ins, Buy-Outs and Longevity Swaps 2008 – 2013, current market data for 2014 from [www.artemis.bm](http://www.artemis.bm).

wendet werden. Die Swaps umfassen im Wesentlichen ein Bündel von S-Forwards mit unterschiedlichen Laufzeiten. Dies wird auch als tpx-Forward bezeichnet. In der Abbildung 41 ist die Vorgehensweise bei einem Mortality Forward illustriert.



**Abbildung 41: Vorgehensweise bei einem Mortality Forward**

Mortality Forwards laufen i. d. R. über einen Zeitraum von 10 Jahren und werden derzeit nur als OTC Geschäft angeboten, siehe dazu die Abbildung 42 mit der Auszahlungsstruktur eines Mortality Forwards.



**Abbildung 42: Auszahlungsstruktur des Mortality Forwards**

Die Auszahlung erfolgt als Ausübungspreis abzüglich der realisierten Sterberate. Es gibt kein übertragenes Basisrisiko, nur das systematische Risiko. Während der Laufzeit des Vertrages wird ein Index veröffentlicht. Ist die Sterberate höher als erwartet, so muss der Verkäufer zahlen, ist die Sterblichkeit geringer als erwartet, dann muss der Käufer zahlen. Es gibt eine feste Laufzeit des Handels. Eine derartige Lösung könnte attraktiv sein aufgrund der Einsparungen bei den Kapitalkosten, obwohl die Abdeckung ziemlich teuer ist.

### **Beispiel**

Im November 2004 wurde ein EIB / BNP Longevity Bond angekündigt, der allerdings nie verkauft wurde. Nachfolgend sind kurz Aufbau und Probleme der angedachten Konstruktion illustriert:

- Ankündigung und versuchter Verkauf durch die European Investment Bank
- BNP Paribas war der Verkäufer, das Langlebkeitsrisiko wurde rückversichert
- £ 540 Mio. bei 25 Jahre Laufzeit (die möglicherweise zu kurz war)
- Amortisierende Anleihe
- Variierende Zahlungen, die an den einen Index, der das Überleben einer Kohorte widerspiegelt, gebunden sind (Englische und walisische Männer im Alter von 65 Jahren)
- Erforderliche Investition von den Käufern
- Kosten zur Absicherung ca. 20-30 Basispunkte
- Kreditrisiko (Bank, Rückversicherer)
- Cross-Currency Zinsswap zwischen der beteiligten EIB und BNP: EIB zahlt floating Euro und erhält fixe Sterling
- Sollte ein indirekter Cashflow-Hedge sein

Eine mögliche Index Lösung für zukünftige Wert Absicherung könnte wie folgt aussehen:

- BW Absicherung für ein synthetisches Portefeuille – abgestimmt auf ein tatsächliches Portefeuille durch die Festsetzung der
  - Sterblichkeit im Verhältnis zur Bevölkerung sowie der
  - Diskontfaktoren und Fälligkeit.
- Festlegung einer Priorität (Attachment Point) und einer Haftung (Detachment Point = Priorität + Haftung) mit

Auszahlung = MAX (0, MIN (BW – Priorität; Haftung),

wobei BW der Barwert ist zum Zeitpunkt der Auszahlung mit den verfügbaren Daten und dem vereinbarten Projektionsverfahren (zum Beispiel automatisierter Lee-Carter).

- Direkter Value-Hedge.

Dieser Ansatz ist potenziell billiger als ein Longevity Swap, aber das Langlebighkeitsrisiko für ein konkretes Portfolio ist nicht vollständig abgedeckt, ein Basisrisiko bleibt.

Die Life & Longevity Markets Association (LLMA) ist eine Organisation mit dem Ziel, einen liquiden gehandelten Markt für Langlebighkeits- und Sterblichkeitsrisiken zu ermöglichen.

Es gibt einen LLMA index (2012 eingeführt) mit Sterblichkeitsraten und Lebenserwartungen für die USA, England & Wales, den Niederlanden und Deutschland, Standards für q-Forwards und s-Forwards sowie ein Rahmenwerk für die Preisbestimmung.

## 4.6 Wrap Up

Die Vor- und Nachteile von Rückversicherungs-lösungen und Derivaten sind in der Tabelle 4 zusammengestellt.

|                         |   |
|-------------------------|---|
| <b>Rückversicherung</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Vollständiger Risikotransfer durch Schadenübernahme</li> <li>• Deckung bis zum natürlichen Auslauf</li> <li>• Beendigung nur durch zusätzliche Vereinbarung</li> <li>• Ggf. höhere Prämie</li> <li>• Rechnungslegung als (Rück-) Versicherung</li> <li>• Direkte Auswirkung auf Solvenz durch anerkannte Methode</li> </ul>      |
| <b>Derivat</b>          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Signifikantes Basisrisiko verbleibt</li> <li>• Abgekürzte Deckung</li> <li>• Ggf. einfacher zu beenden (bei ausreichender Liquidität)</li> <li>• Gebühr nur für das systematische Risiko</li> <li>• Mark-to-market oder Mark-to-model erforderlich</li> <li>• Auswirkung auf Solvenz ist mit der Aufsicht abzustimmen</li> </ul> |

**Tabelle 4: Vor- und Nachteile von Rückversicherungs-lösungen und Derivaten**

Das Volumen des Langlebighkeitsmarktes erhöht sich stetig im Laufe der Zeit. Neue Produkte zu Pensionen und Renten entstehen, die ein teilweise sehr detailliertes Verständnis der Schlüsselfaktoren für die Sterblichkeit erfordern. Der Longevity Swap ist ein Standard-rückversicherungsprodukt in Großbritannien mit einer direkten Cashflow Absicherung, die alle Risiken abdeckt (systematische und unsystematische). Einige Index-Lösungen wurden bereits gezeichnet und viele mehr sind derzeit in Entwicklung. Solvency II wird dafür sorgen, dass auch Deckungen angeboten werden, die speziell auf Solvency II-Regelungen abstellen.

## Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am IVW Köln“. Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter [www.ivw-koeln.de](http://www.ivw-koeln.de) oder [hier](#) abgerufen werden.

**Forschung am IVW Köln, 8/2015**

**Strobel (Hrsg.): Management des Langlebigkeitsrisikos. Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium am 5.12.2014 in Köln.**

**Köln, April 2015**

**ISSN (online) 2192-8479**

Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:

Prof. Dr. Lutz Reimers-Rawcliffe  
Prof. Dr. Peter Schimikowski  
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /  
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /  
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web [www.ivw-koeln.de](http://www.ivw-koeln.de)

Schriftleitung / editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270

Fax +49 221 8275-3277

Mail [juergen.strobel@fh-koeln.de](mailto:juergen.strobel@fh-koeln.de)

Institut für Versicherungswesen /  
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /  
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences  
Gustav Heinemann-Ufer 54  
50968 Köln

Herausgeber der Publikation / Editor:

Prof. Dr. Jürgen Strobel  
Institut für Versicherungswesen /  
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /  
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences  
Gustav Heinemann-Ufer 54  
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3270

Fax +49 221 8275-3277

Mail [juergen.strobel@fh-koeln.de](mailto:juergen.strobel@fh-koeln.de)

## Zuletzt erschienen im Rahmen von „Forschung am IVW Köln“

### 2015

- Völler, Wunder: Enterprise 2.0: Konzeption eines Wikis im Sinne des prozessorientierten Wissensmanagements, Nr. 7/2015
- Heep-Altiner, Rohlf: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“, Nr. 6/2015
- Knobloch: Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen, Nr. 5/2015
- Heep-Altiner, Rohlf, Beier: Erneuerbare Energien und ALM eines Versicherungsunternehmens, Nr. 4/2015
- Dolgov: Calibration of Heston's stochastic volatility model to an empirical density using a genetic algorithm, Nr. 3/2015
- Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen, Nr. 2/2015
- Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2014, Nr. 1/2015

### 2014

- Müller-Peters, Völler (beide Hrsg.): Innovation in der Versicherungswirtschaft, Nr. 10/2014
- Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert, Nr. 9/2014
- Heep-Altiner, Münchow, Scuzzarello: Ausgleichsrechnungen mit Gauß Markow Modellen am Beispiel eines fiktiven Stornobestandes, Nr. 8/2014
- Grundhöfer, Röttger, Scherer: Wozu noch Papier? Einstellungen von Studierenden zu E-Books, Nr. 7/2014
- Heep-Altiner, Berg (beide Hrsg.): Katastrophenmodellierung - Naturkatastrophen, Man Made Risiken, Epidemien und mehr. Proceedings zum 6. FaRis & DAV Symposium am 13.06.2014 in Köln, Nr. 6/2014
- Goecke (Hrsg.): Modell und Wirklichkeit. Proceedings zum 5. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2013 in Köln, Nr. 5/2014
- Heep-Altiner, Hoos, Krahforst: Fair Value Bewertung von zedierten Reserven, Nr. 4/2014
- Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung, Nr. 3/2014
- Zimmermann: Frauen im Versicherungsvertrieb. Was sagen die Privatkunden dazu?, Nr. 2/2014
- Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2013, Nr. 1/2014