Risikomessung und Diversifikation unter Solvency II

9. FaRis & DAV Symposium
TH Köln, 4. Dezember 2015

Dietmar Pfeifer

Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Fakultät V
Institut für Mathematik

Agenda

1. Einführung
2. Die Solvency II-Bilanz
3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße
4. Korrelation und Diversifikation
5. Zusammenfassung und Fazit
6. Literatur

1. Einführung

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

1. Einführung

"Die Entstehungsgeschichte von Solvency II wird vom Vorwurf beherrscht, dass die bestehenden Solvabilitiätsvorschriften nicht risikoorientiert seien. Die Eigenmittelvorschriften decken nur Versicherungsrisiken ab; das Marktrisiko, das Kreditrisiko und das operationelle Risiko blieben hingegen unberücksichtigt. […] Aus diesem Grund sollten die Instrumente der Finanzaufsicht im Versicherungsbereich insbesondere nach dem Vorbild der entsprechenden Reformen im Bankenbereich (Basel II und III) ausgestaltet werden. Mit Solvency II wird daher größere Risikoorientierung und mehr Aufsichtskonvergenz bezweckt. Hauptziel der Versicherungsaufsicht ist aber (weiterhin) die Stärkung und Vereinheitlichung des Schutzes der Versicherten."

[Bennemann et al. (2011): Handbuch Solvency II, p. 4]

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

1. Einführung

"Durch Solvency II findet ein Paradigmenwechsel in der europäischen Versicherungsaufsicht statt. Die vergleichsweise einfachen Methoden zur Ermittlung der Eigenmittelanforderungen aus Solvency I werden durch Verfahren ersetzt, die deutlich besser den Risikogehalt der einzelnen Bilanzpositionen widerspiegeln. Zur Berechnung der benötigten Eigenmittel können Erst- und Rückversicherungsunternehmen [...] dabei entweder auf die Standardformel zurückgreifen oder Interne Modelle für ihre Risiken bzw. Teile ihrer Risiken entwickeln. Gleichzeitig werden die verfügbaren Eigenmittel aus einem Marktwertansatz ermittelt, was ebenfalls einen Bruch zu der bisherigen Verwendung von Werten aus dem Rechnungswesen darstellt."

[Bennemann et al. (2011): Handbuch Solvency II, p. 4]

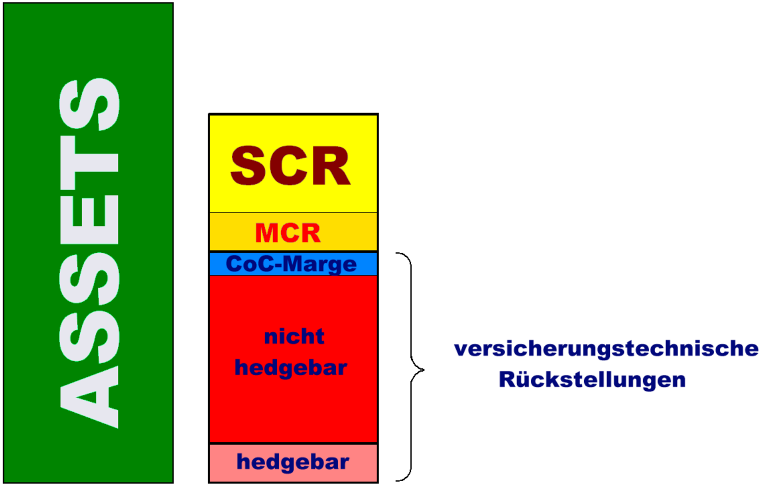
1. Einführung

"Die Solvency II-Richtlinie verfolgt einen an Prinzipien orientierten Ansatz in der Rechtsetzung. Dies bedeutet: der Gesetzgeber gibt weitestgehend keine konkreten Regeln in der Solvency II-Rahmenrichtlinie vor, sondern formuliert Prinzipien, die jeweils eine bestimmte Zielsetzung verfolgen. Diese Vorschriften haben zunächst einen generellen, für alle Unternehmen allgemeingültigen Charakter. Die Anwendung der Prinzipien erfordert eine individuelle Prüfung des Einzelfalls, sowohl auf der Ebene der Unternehmen als auch auf der Ebene der Aufsicht. Durch eine Vielzahl von unbestimmten Rechtsbegriffen erhöhen sich die Freiheitsgrade für die Unternehmen bei der Wahl der Umsetzungsalternativen."

[Gründl et al. (2015): Solvency II - Eine Einführung, p. 9]

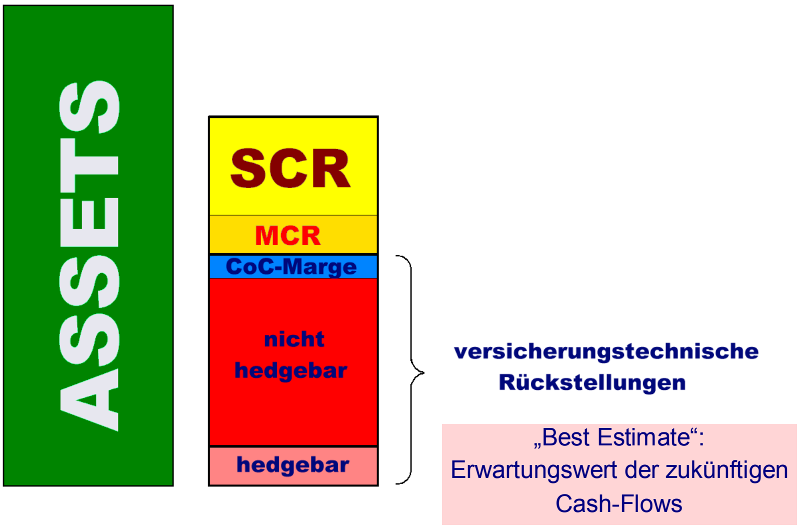
2. Die Solvency II-Bilanz

Die Solvency II-Bilanz

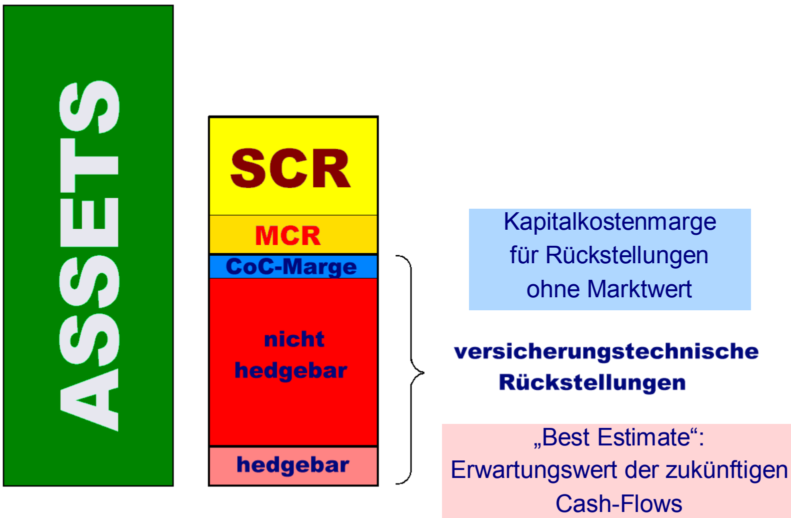


CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Die Solvency II-Bilanz

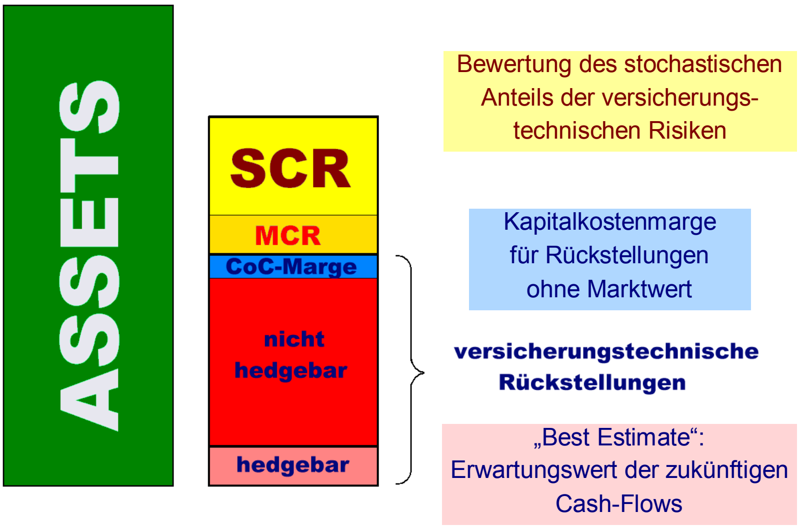


Die Solvency II-Bilanz



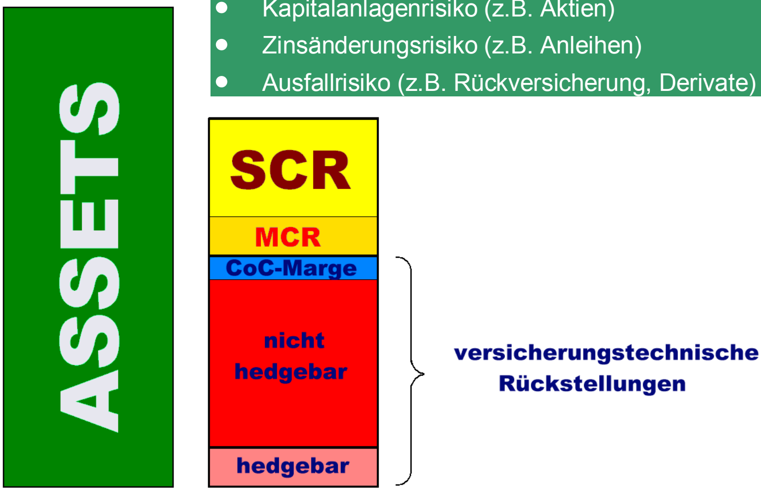
universität OLDENBURG

Die Solvency II-Bilanz



Die Solvency II-Bilanz

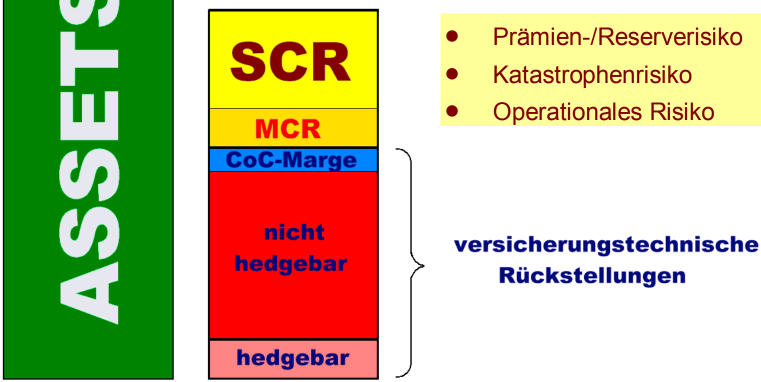
- Immobilienrisiko
- Kapitalanlagenrisiko (z.B. Aktien)
- Zinsänderungsrisiko (z.B. Anleihen)
- Ausfallrisiko (z.B. Rückversicherung, Derivate)



CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Die Solvency II-Bilanz

- Immobilienrisiko
- Kapitalanlagenrisiko (z.B. Aktien)
- Zinsänderungsrisiko (z.B. Anleihen)
- Ausfallrisiko (z.B. Rückversicherung, Derivate)

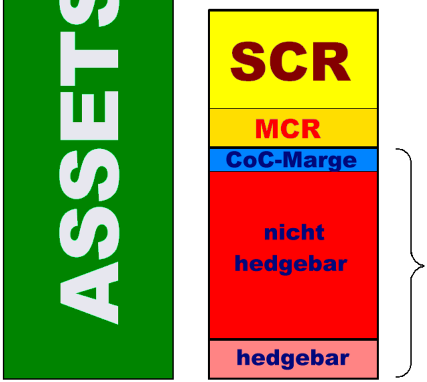


- Prämien-/Reserverisiko
- Katastrophenrisiko
- Operationales Risiko

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Die Solvency II-Bilanz

- Immobilienrisiko
- Kapitalanlagenrisiko (z.B. Aktien)
- Zinsänderungsrisiko (z.B. Anleihen)
- Ausfallrisiko (z.B. Rückversicherung, Derivate)



- Prämien-/Reserverisiko
- Katastrophenrisiko
- Operationales Risiko

Prämien- und Reserverisiko unterliegen als Risikoposition der SCR-Berechnung

versicherungstechnische Rückstellungen

Prämien- und Reserverückstellung gehen als Best Estimate in die Berechnung ein

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

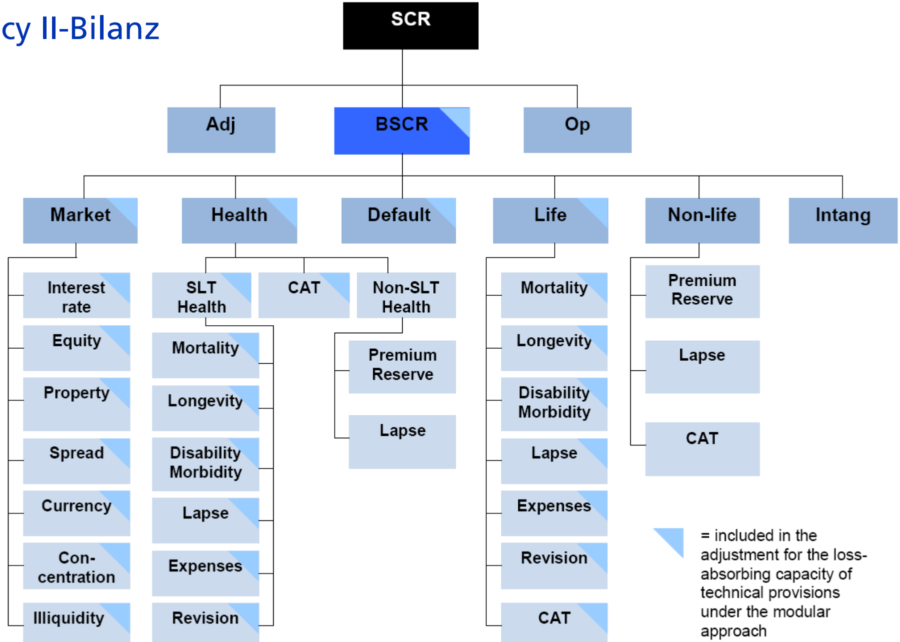
Die Solvency II-Bilanz

- Prämien- und Reserverisiko werden immer zusammen betrachtet
- Das Prämienrisiko misst die zufälligen Schwankungen derjenigen Zahlungen, die aus künftigen Schadenfällen resultieren, die im nächsten Jahr vertragsrelevant sind (inklusive deren nachfolgende Abwicklung!)
- Das Reserverisiko misst die zufälligen Schwankungen derjenigen Zahlungen, die aus Schadenfällen resultieren, die bereits eingetreten sind (sowohl bereits gemeldet [incurred] als auch noch nicht gemeldet [IBNR: Incurred But Not Reported])

Die Solvency II-Bilanz

- Prämien- und Reserverisiko werden auf ein gemeinsames Volumenmaß V bezogen
- Das Volumenmaß ist eine Kombination der Best Estimates für die Reserven und die vertragsrelevanten künftigen Schadenzahlungen („Prämienrückstellung")
- Der Best Estimate für die Prämienrückstellung wird aus extrapolierten Prämien des aktuellen Jahres berechnet
- Der Best Estimate für die Reserven wird aus diskontierten geschätzten Zahlungsströmen als eine Art „Mittelwert" berechnet

Die Solvency II-Bilanz



Die Solvency II-Bilanz

- Basis des SCR ist das Risikomaß **Value@Risk** (VaR) für die einzelnen Wahrscheinlichkeitsverteilungen je Risiko und Sparte (aktuell: das 99,5%-Quantil der jeweiligen Verteilung)

- **SCR** ist im Prinzip die **Differenz aus Risikomaß und Prämienaufkommen (Prämienaufkommen = Erwartungswert + Risikozuschlag)**

- Aggregation der einzelnen SCR's zu einem **Gesamt-SCR** über die „Kovarianzformel" unter Berücksichtigung von **Korrelationen** zwischen den Risiken ($\rightarrow$ Diversifikationseffekte)

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

„Risikomaß: eine mathematische Funktion, die unter einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose einen monetären Betrag bestimmt und monoton mit dem Risikopotenzial steigt, das der Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose zugrunde liegt.“

[Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen vom 1. April 2015, Bundesgesetzblatt (2015) Teil I Nr. 14, p. 442f]

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

„Risikomaß: eine mathematische Funktion, die unter einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose einen monetären Betrag bestimmt und monoton mit dem Risikopotenzial steigt, das der Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose zugrunde liegt."

[Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen vom 1. April 2015, Bundesgesetzblatt (2015) Teil I Nr. 14, p. 442f]

Ist das wirklich zutreffend?

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Sei $\mathfrak{X}$ eine Menge nicht-negativer Zufallsvariablen (Risiken) X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ein Risikomaß R auf $\mathfrak{X}$ ist eine Abbildung $\mathfrak{X} \to \mathbb{R}^+$ mit den folgenden Eigenschaften:

$P^X = P^Y \;\Rightarrow\; R(X) = R(Y)$	für alle $X, Y \in \mathfrak{X}$	[Verteilungsinvarianz]
$R(cX) = c\,R(X)$	für alle $X \in \mathfrak{X}$ und $c \geq 0$	[Skaleninvarianz]
$R(X + c) = R(X) + c$	für alle $X \in \mathfrak{X}$ und $c \geq 0$	[Translationsinvarianz]
$R(X) \leq R(Y)$	für alle $X, Y \in \mathfrak{X}$ mit $X \leq_{st} Y$	[Monotonie]

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Ein Risikomaß heiß *kohärent*, wenn zusätzlich gilt:

$R(X+Y) \leq R(X)+R(Y)$ für alle $X,Y \in \mathfrak{X}$ [Subadditivität]

Diese Ungleichung induziert einen *Diversifikationseffekt* für *beliebige* Risiken $X_1,\cdots,X_n$ (abhängig oder nicht), denn es folgt mit vollständiger Induktion:

$R\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} R(X_k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Im Folgenden werden wir den Term "(Risiko-)*Konzentrationseffekt*" im Gegensatz zum "*Diversifikationseffekt*" benutzen, charakterisiert durch die umgekehrte Ungleichung

$R(X+Y) > R(X)+R(Y)$ für gewisse $X,Y \in \mathfrak{X}$.

Das populäre Standardabweichungsprinzip *SDP* (das auch in der Tarifierung verwendet wird) ist gegeben durch

$SDP(X) = E(X) + \gamma\sqrt{Var(X)}$ für ein festes $\gamma > 0$ und $X \in \mathfrak{X} = \mathfrak{L}^2_+(\Omega,\mathcal{A},P)$,

die Menge der quadratisch integrierbaren Risiken auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

SDP ist aber *kein* Risikomaß, da es *nicht monoton* ist (erfüllt aber alle anderen Bedingungen).

carl von ossietzky universität OLDENBURG

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Subadditivität des Standardabweichungsprinzips:

$$\begin{aligned}
SDP(X+Y) &= E(X+Y)+\gamma\sqrt{Var(X+Y)} \\
&= E(X)+E(Y)+\gamma\sqrt{Var(X)+Var(Y)+2Korr(X,Y)\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \\
&\leq E(X)+E(Y)+\gamma\sqrt{Var(X)+Var(Y)+2\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \\
&= E(X)+E(Y)+\gamma\sqrt{\left(\sqrt{Var(X)}+\sqrt{Var(Y)}\right)^2} \\
&= E(X)+E(Y)+\gamma\left(\sqrt{Var(X)}+\sqrt{Var(Y)}\right) = SDP(X)+SDP(Y)
\end{aligned}$$

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Nicht-Monotonie des Standardabweichungsprinzips:

Risiken X, Y mit Dichten

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_Y(x) = \begin{cases} a x^b, & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-2e^{-x}}}, & x > 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

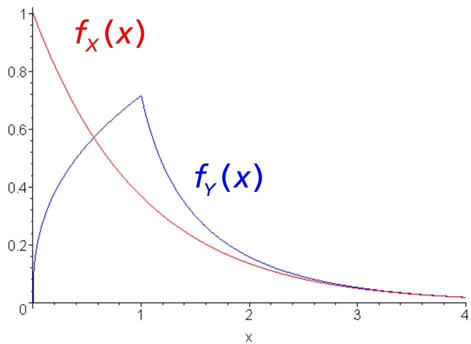
mit $a = \dfrac{1}{\sqrt{e(e-2)}} = 0.7156...,\ b = \dfrac{3-e}{e-2} = 0.3922...$

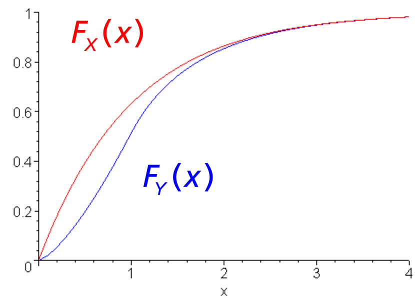
CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Nicht-Monotonie des Standardabweichungsprinzips:

Hier gilt $X \leq_{st} Y$ mit $E(X) = \sigma(X) = 1,\ E(Y) = 1.2003...,\ \sigma(Y) = 0.9294...$





Für $\gamma = 3$ ergibt sich: $SDP(X) = 4 > 3.9887... = SDP(Y)$.

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das in Basel II/III und Solvency II verwendete Risikomaß ist der Value@Risk VaR, definiert als Quantil der Risiko-Verteilung:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) := Q_X(1-\alpha) \qquad \text{für } X \in \mathfrak{X} \text{ und } 0 < \alpha < 1,$$

wobei Q_X die Quantilfunktion bezeichnet:

$$Q_X(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, P(X \leq x) \geq u\} \qquad \text{für } 0 < u < 1.$$

VaR ist ein Risikomaß, aber im Allgemeinen *nicht kohärent*.

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

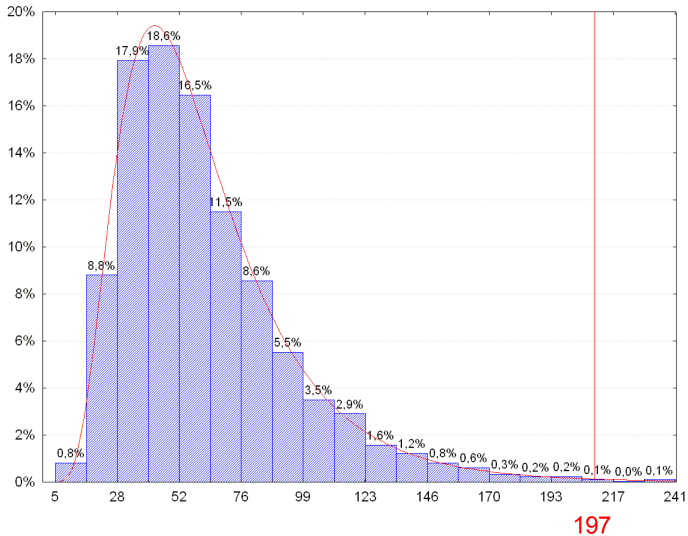
Das "kleinste" kohärente Risikomaß oberhalb des VaR ist der Expected Shortfall (auch *average Value-at-Risk*) ES, der gegeben ist durch

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_u(X)\,du \quad \text{für } 0 < \alpha < 1.$$

Falls $P\left(X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right) = \alpha$ gilt, entspricht dies dem Ausdruck

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = E\left(X \,|\, X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right).$$

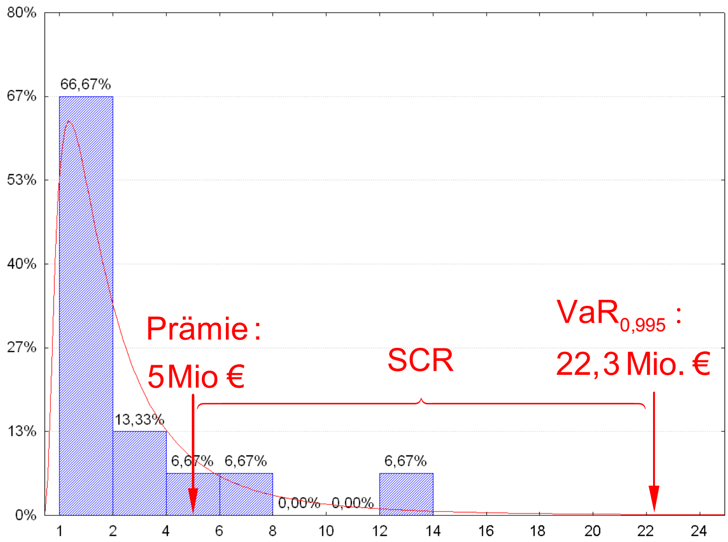
3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße



Veranschaulichung des $\mathrm{VaR}_{0{,}995}$ (Lognormalverteilung)

carl von ossietzky universität OLDENBURG

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße



Jahr	Schäden (Mio €)
2000	2,069
2001	1,074
2002	1,611
2003	1,832
2004	0,527
2005	3,290
2006	0,988
2007	0,603
2008	5,467
2009	13,704
2010	1,138
2011	4,121
2012	1,229
2013	1,536
2014	6,643

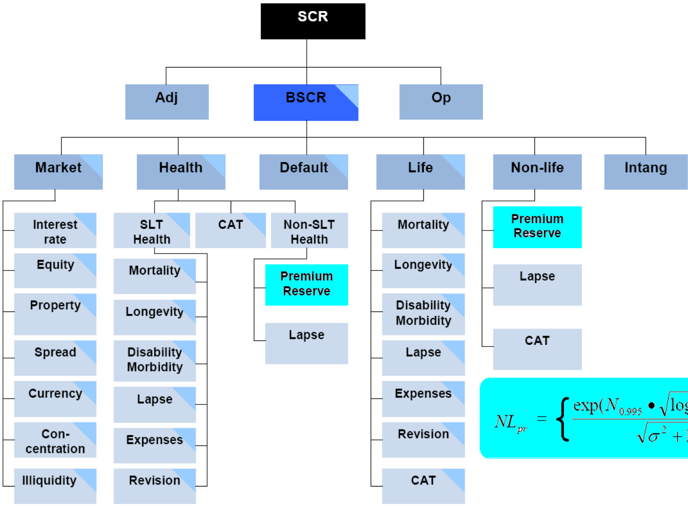
Beispiel: Anpassung an Lognormalverteilung

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Wiederkehrperiode	Wahrscheinlichkeit	VaR	Prämie	SCR
5	0,800	4,379	5,000	-0,621
10	0,900	6,617	5,000	1,617
15	0,933	8,131	5,000	3,131
20	0,950	9,305	5,000	4,305
25	0,960	10,277	5,000	5,277
50	0,980	13,658	5,000	8,658
100	0,990	17,640	5,000	12,640
150	0,993	20,276	5,000	15,276
200	0,995	22,294	5,000	17,294

Technische Berechnung des **SCR**

3. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße



$$NL_{pr} = \left\{ \frac{\exp(N_{0.995} \bullet \sqrt{\log(\sigma^2+1)})}{\sqrt{\sigma^2+1}} - 1 \right\} \bullet V$$

Volumenfaktor = 99,5%-Quantil der Lognormalverteilung (Mittelwert 1)
Volumen = Best Estimate der Rückstellungen (Prämien plus Netto-Reserven)

4. Korrelation und Diversifikation

4. Korrelation und Diversifikation

"Diversifikationseffekte: eine Reduzierung des Gefährdungspotenzials von Versicherungsunternehmen und -gruppen durch die Diversifizierung ihrer Geschäftstätigkeit, die sich aus der Tatsache ergibt, dass das negative Resultat eines Risikos durch das günstigere Resultat eines anderen Risikos ausgeglichen werden kann, wenn diese Risiken nicht voll korreliert sind."

[Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen vom 1. April 2015, Bundesgesetzblatt (2015) Teil I Nr. 14, p. 441]

carl von ossietzky universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

"Diversification arises when different activities complement each other, in the field of both return and risk. […] The diversification effect is calculated by using correlation factors. Correlations are statistical measures assessing the extend to which events could occur simultaneously. […] A correlation factor of 1 implies that certain events will always occur simultaneously. Hence, there is no diversification effect and two risks identically add up. Risk managers tend to say that such risks are perfectly correlated (i.e., they have a high correlation factor), meaning that these two risks do not actually diversify at all. A correlation factor of 0 implies that diversification effects are present and a certain diversification benefit holds."

[Doff (2011), p. 249f.]

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

Copula: Eine Copula C ist (im Wesentlichen) eine multivariate Verteilungsfunktion mit (stetig) uniformen Randverteilungsfunktionen über dem Intervall $[0,1]$.

Jede Copula C ist durch die sogenannten Fréchet-Hoeffding-Schranken eingeschachtelt, d.h. es gilt

$$C_*(\mathbf{u}) := \max(u_1 + \cdots + u_n - n + 1, 0) \leq C(u_1, \cdots, u_n) \leq C^*(\mathbf{u}) := \min(u_1, \cdots, u_n).$$

Die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke C^* ist selbst eine Copula (in jeder Dimension); die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke C_* ist nur in zwei Dimensionen eine Copula.

carl von ossietzky universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

Sklar's Theorem: Sei H eine n-dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\cdots,F_n$. Dann existiert eine Copula C derart, dass für alle $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ gilt:

$$H(x_1,\cdots,x_n)=C\left(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n)\right).$$

Wenn alle Randverteilungsfunktionen stetig sind, ist die Copula eindeutig bestimmt. Umgekehrt gilt: bezeichnen $F_1^{-1},\cdots,F_n^{-1}$ die generalisierten Inversen der Randverteilungsfunktionen (Quantilfunktionen), so gilt für alle $(u_1,\cdots,u_n)\in[0,1]^n$:

$$C(u_1,\cdots,u_n)=H\left(F_1^{-1}(u_1),\cdots,F_n^{-1}(u_n)\right).$$

carl von ossietzky universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

Bezeichnet X eine beliebige Zufallsvariable, so gilt:

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X, X, \cdots, X)$ mit n Komponenten besitzt die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke C^* als Copula.

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X, -X)$ mit zwei Komponenten besitzt die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke C_* als Copula.

Ist X positiv, so besitzt auch der Zufallsvektor $\mathbf{X} = \left(X, \frac{1}{X}\right)$ die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke C_* als Copula.

carl von ossietzky universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

Zufallsvektoren, die C^* oder C_* als Copula besitzen, heißen *komonoton* bzw. *kontramonoton*.

Allgemein gilt:

Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ ist *komonoton* genau dann, wenn es eine Zufallsvariable Z und gleichsinnig wachsende Funktionen f, g gibt, so dass $X = f(Z)$ und $Y = g(Z)$ ist.

Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ ist *kontramonoton* genau dann, wenn es eine Zufallsvariable Z und Funktionen f, g gibt, die gegensinnig wachsen, so dass $X = f(Z)$ und $Y = g(Z)$ ist.

4. Korrelation und Diversifikation

Zufallsvektoren, die C^* oder C_* als Copula besitzen, heißen *komonoton* bzw. *kontramonoton*.

Allgemein gilt:

Die Korrelation $\rho(X,Y)$ ist *maximal* genau dann, wenn $\mathbf{X}=(X,Y)$ *komonoton* ist. Sie beträgt 1, wenn X und Y positiv linear abhängig sind.

Die Korrelation $\rho(X,Y)$ ist *minimal* genau dann, wenn $\mathbf{X}=(X,Y)$ *kontramonoton* ist. Sie beträgt -1, wenn X und Y negativ linear abhängig sind.

4. Korrelation und Diversifikation

Beispiel 1. Die gemeinsame Verteilung der Risiken X und Y sei durch die folgende Tabelle gegeben:

$P(X=x, Y=y)$		x				
		0	50	100	$P(Y=y)$	$P(Y \le y)$
y	0	β	$0.440-\beta$	0.000	0.440	0.440
	40	$0.554-\beta$	β	0.001	0.555	0.995
	50	0.000	0.001	0.004	0.005	1.000
	$P(X=x)$	0.554	0.441	0.005		
	$P(X \le x)$	0.554	0.995	1.000		

mit $0 \le \beta \le 0.440.$ Es gilt: $\mathrm{VaR}_\alpha(X)=50,\ \mathrm{VaR}_\alpha(Y)=40$ (für $\alpha=0.005$).

4. Korrelation und Diversifikation

Für die Momente von X und Y erhält man (σ bezeichne die Standard-abweichung):

$E(X)$	$E(Y)$	$\sigma(X)$	$\sigma(Y)$	$\rho(\beta)=\rho(X,Y)$
22.550	22.450	25.377	19.912	$-0.9494+3.9579\,\beta$

Die insgesamt möglichen Risiko-Korrelationen liegen damit im Intervall $[-0.9494;\,0.7921]$, wobei eine Korrelation von Null für $\beta=0.2399$ angenommen wird.

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summen-Risikos $S = X + Y$:

s	0	40	50	90	100	140	150
$P(S = s)$	β	$0.554-\beta$	$0.440-\beta$	β	0.001	0.001	0.004
$P(S \leq s)$	β	0.554	$0.994-\beta$	0.994	0.995	0.996	1.000

Damit liegt eine *Risikokonzentration* vor wegen

$$\mathrm{VaR}_\alpha(S) = 100 > 90 = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y),$$

unabhängig vom Parameter β und daher auch unabhängig von den möglichen (positiven wie negativen) Korrelationen zwischen X und Y!

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

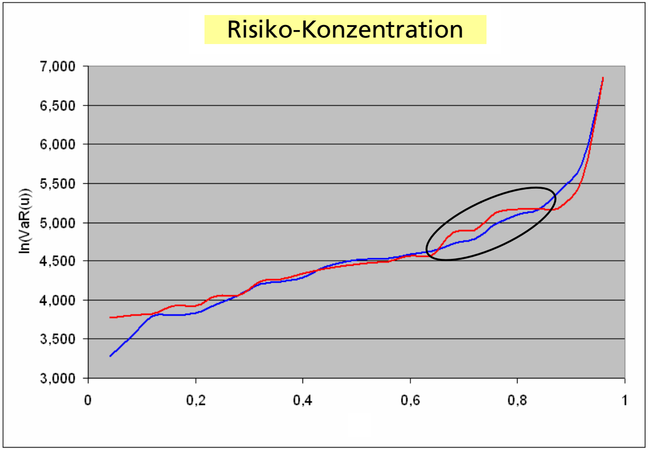
Beispiel 2. Reale Schäden aus einem Nat-Cat Portfolio:

Jahr	Lob 1	Lob 2	Summe S	u	VaR Lob1(u)	VaR Lob2(u)	VaR Lob1(u) + VaR Lob2(u)	VaR S(u)
1	40,513	44,650	85,163	0,04	13,954	12,673	26,627	43,582
2	16,968	28,874	45,842	0,08	14,987	19,016	34,003	44,594
3	45,337	51,018	96,355	0,12	16,960	27,470	44,430	45,842
4	57,120	19,016	76,136	0,16	16,968	27,634	44,602	50,810
5	41,480	27,470	68,950	0,20	17,489	28,595	46,084	50,823
6	14,987	28,595	43,582	0,24	22,750	28,874	51,624	57,342
7	74,524	101,544	176,068	0,28	24,574	33,260	57,834	57,834
8	64,578	111,933	176,511	0,32	30,014	36,856	66,870	68,950
9	42,072	92,727	134,799	0,36	30,745	38,252	68,997	71,211
10	24,574	33,260	57,834	0,40	33,055	39,853	72,908	76,136
11	177,842	81,139	258,981	0,44	38,150	44,650	82,800	81,720
12	17,489	39,853	57,342	0,48	40,513	48,461	88,974	85,163
13	70,719	60,297	131,016	0,52	40,667	50,975	91,642	86,999
14	30,014	56,985	86,999	0,56	41,480	51,018	92,498	89,443
15	40,667	140,794	181,461	0,60	42,072	55,663	97,735	96,355
16	112,692	55,663	168,355	0,64	45,337	56,985	102,322	96,417
17	13,954	36,856	50,810	0,68	51,191	60,297	111,488	131,016
18	30,745	50,975	81,720	0,72	57,120	63,362	120,482	134,799
19	38,150	12,673	50,823	0,76	64,578	81,139	145,717	168,355
20	668,552	276,521	945,073	0,80	70,719	92,727	163,446	176,068
21	22,750	48,461	71,211	0,84	74,524	101,544	176,068	176,511
22	16,960	27,634	44,594	0,88	112,692	111,933	224,625	181,461
23	33,055	63,362	96,417	0,92	177,842	140,794	318,636	258,981
24	51,191	38,252	89,443	0,96	668,552	276,521	945,073	945,073

Risiko-
Konzentration

4. Korrelation und Diversifikation

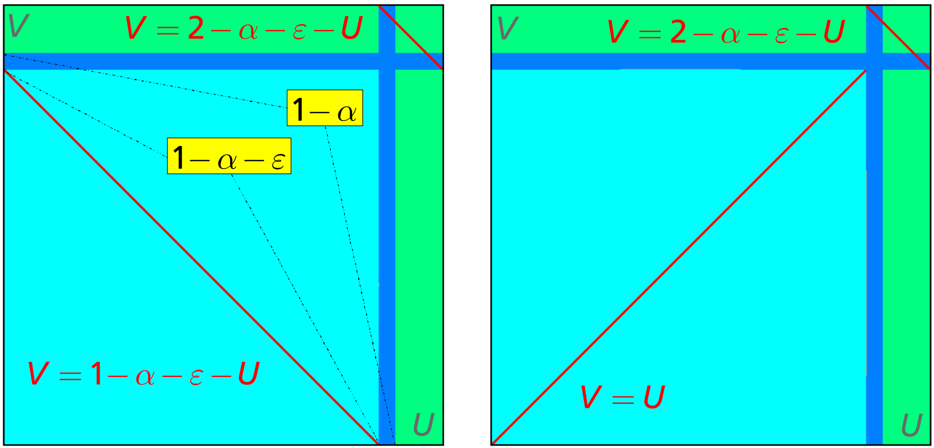
Beispiel 2. Reale Schäden aus einem Nat-Cat Portfolio:



rot: VaR S(u), blau: VaR Lob1(u) + VaR Lob2(u)

4. Korrelation und Diversifikation

Spezielle Copulas:



untere extremale Copula $\underline{C}$ obere extremale Copula $\overline{C}$

4. Korrelation und Diversifikation

Beispiel 3. Die Risiken X und Y mögen der gleichen Lognormalverteilung $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2\right)$ mit $\sigma > 0$ genügen, was insbesondere $E(X) = E(Y) = 1$ bedeutet.

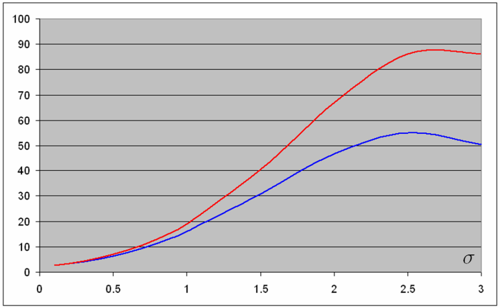
Die folgende Tabelle zeigt einige numerische Ergebnisse für die extremalen Copulas $\underline{C}$ und $\overline{C}$, insbesondere die maximal mögliche Spanne der dadurch induzierten Korrelationen. Gemäß dem Solvency II-Standard sei $\alpha = 0.005$ gewählt (und $\varepsilon = 0.001$, was hier ausreicht).

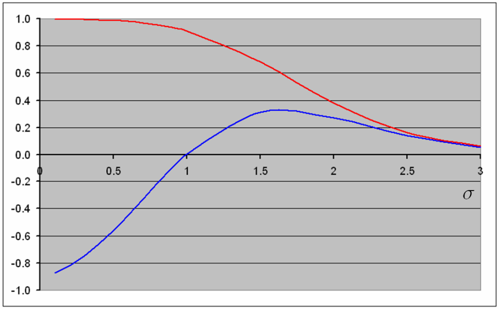
4. Korrelation und Diversifikation

σ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\mathrm{VaR}_\alpha(X)=\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$	1.2873	1.6408	2.0704	2.5866	3.1992	3.9177	4.7497
$\mathrm{VaR}_\alpha(X)+\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$	2.5746	3.2816	4.1408	5.1732	6.3984	7.8354	9.4994
$\mathrm{VaR}_\alpha\left(X^*+Y^*\right)$	2.6205	3.3994	4.3661	5.5520	6.9901	8.7134	10.7537
$\rho_{\min}\left(X^*,Y^*\right)$	–0.8719	–0.8212	–0.7503	–0.6620	–0.5598	–0.4480	–0.3310
$\rho_{\max}\left(X^*,Y^*\right)$	0.9976	0.9969	0.9951	0.9920	0.9873	0.9802	0.9700

$$P^X = P^Y = \mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2\right)$$

4. Korrelation und Diversifikation



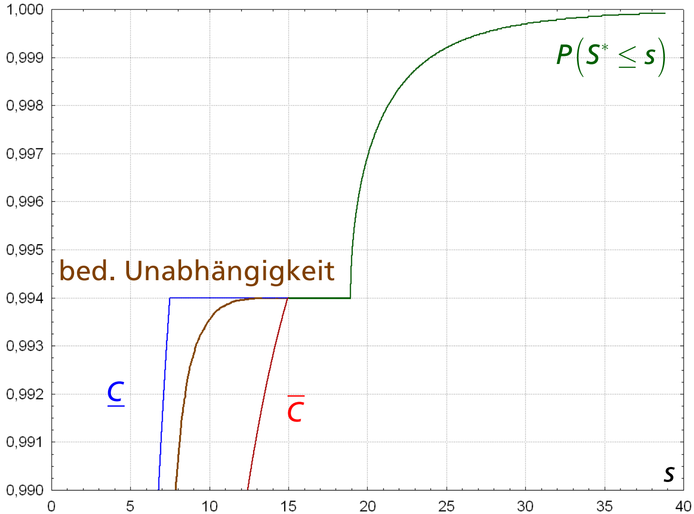


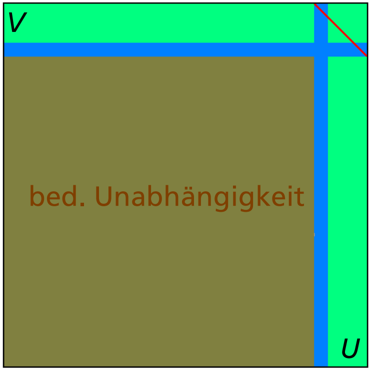
Links: Graph von $\mathrm{VaR}_\alpha\left(X^* + Y^*\right)$ und $\mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$ als Funktion von σ

Rechts: Graph von $\rho_{\max}\left(X^*, Y^*\right)$ und $\rho_{\min}\left(X^*, Y^*\right)$ als Funktion von σ

carl von ossietzky universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

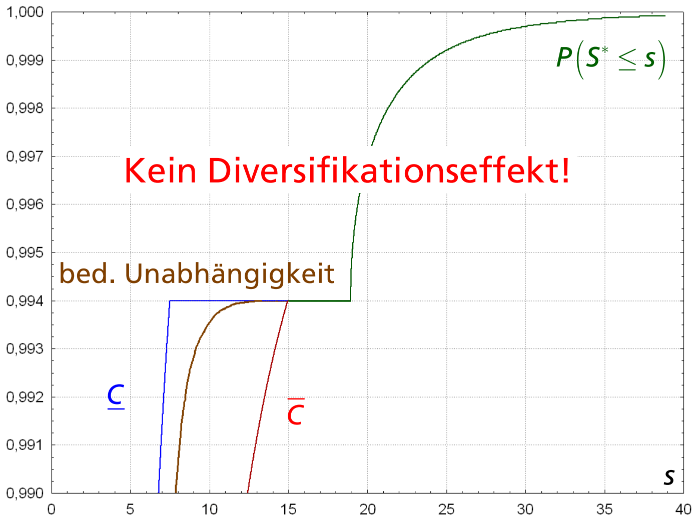


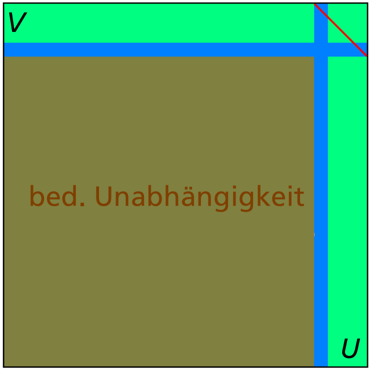


Oberer Teil der Verteilungsfunktion des Summen-Risikos $S^* = X^* + Y^*$ für $\sigma = 1$

carl von ossietzky universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation





Oberer Teil der Verteilungsfunktion des Summen-Risikos $S^* = X^* + Y^*$ für $\sigma = 1$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation

Satz: Es seien **U** und **V** n-dimensionale Zufallsvektoren mit stetigen uniformen Randverteilungen $\mathcal{U}[0,1]$ und I eine $B(1,p)$-binomialverteilte Zufallsvariable mit $0 < p < 1$, unabhängig von $(\mathbf{U},\mathbf{V})$. Dann besitzt der Zufallsvektor $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$ mit den Komponenten

$$W_j := I \cdot p \cdot U_j + (1-I) \cdot \left[p + (1-p) \cdot V_j\right] \text{ für } j = 1, \cdots, n$$

ebenfalls die Randverteilung $\mathcal{U}[0,1]$.

Mit anderen Worten: Der Satz gestattet eine stückweise Konstruktion „neuer“ Copulas aus gegebenen ($\rightarrow$ Patchwork-Copulas).

4. Korrelation und Diversifikation

Die obige (zweidimensionale) Copula-Konstruktion ist genau von diesem Typ, wobei **V** die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke als Copula besitzt, und **U** einer beliebigen Copula folgen kann (zwischen der unteren und oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke, inklusive der Unabhängigkeit der Komponenten).

Die Tatsache, dass zwei Risiken mit fast beliebiger Korrelationsstruktur so konstruiert werden können, dass ihre Aggregation zu einer Risiko-Konzentration führt, kann - zumindest empirisch - auch in höheren Dimensionen gezeigt werden, unter Benutzung des Konstruktionsprinzips aus dem vorigen Satz und der „gleichmäßig schlechtesten" Gauß-Copula für den Zufallsvektor **V** (mit paarweise negativen Korrelationen).

4. Korrelation und Diversifikation

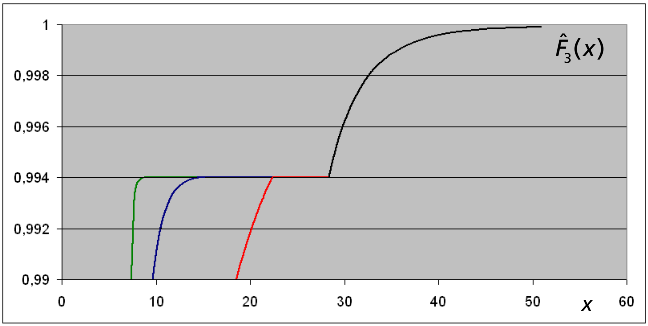
Die folgende Graphik zeigt die empirische Verteilungsfunktion der Summe von *drei* $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2\right)$-lognormalverteilten Risiken X_1, X_2, X_3 für $\sigma = 1$ für die drei Fälle

1. **U** folgt einer "gleichmäßig schlechtesten" Gauß-Copula (grün)
2. **U** besitzt unabhängige Komponenten (blau)
3. **U** folgt der oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke als Copula (rot).

Der Simulationsumfang beträgt jeweils 1.000.000.
Die paarweisen empirischen Korrelationen zwischen jeweils zwei Risiken liegen im Intervall [0,14; 0,91], mit dem Wert 0,32 in Fall 2.

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation



empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}_3(x) \text{ von } \sum_{i=1}^{3} X_i$$

Hier gilt

$$\sum_{i=1}^{3} \mathrm{VaR}_{0,005}(X_i) = 23{,}913,$$

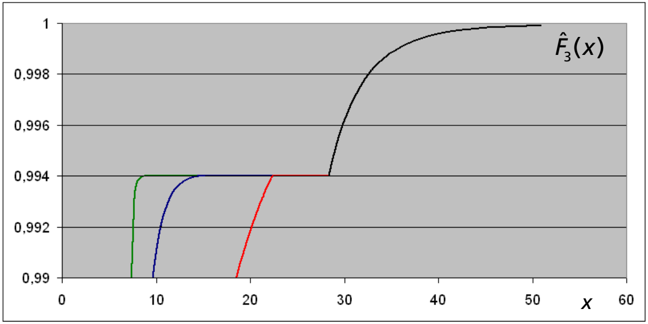
aber (empirisch)

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{0,005}\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right) > 28{,}028$$

in allen drei Fällen.

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

4. Korrelation und Diversifikation



empirische Verteilungsfunktion

$\hat{F}_3(x)$ von $\sum_{i=1}^{3} X_i$

Hier gilt

$$\sum_{i=1}^{3} \mathrm{VaR}_{0,005}(X_i) = 23{,}913,$$

aber (empirisch)

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{0,005}\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right) > 28{,}028$$

in allen drei Fällen.

Kein Diversifikationseffekt!

5. Zusammenfassung und Fazit

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

5. Zusammenfassung und Fazit

Das ursprüngliche Ziel von Solvency II, eine gegenüber Solvabilität I stärkere Risiko-Orientierung für die Bestimmung der erforderlichen Eigenmittel eines VU zur Stärkung der Sicherheit seiner Kunden zu erreichen, ist unstrittig positiv zu bewerten. Aber:

- Das vorgegebene Risikomaß Value@Risk ist nicht kohärent und führt daher nicht grundsätzlich zu einem Diversifikationseffekt bei schwacher Korrelation der Risiken.
- Die im Gesetz geforderte „Monotonie“ eines Risikomaßes ist zumindest aus praktischer Sicht fragwürdig, wenn Monotonie als strikte funktionale Abhängigkeit verstanden wird.

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

5. Zusammenfassung und Fazit

Das ursprüngliche Ziel von Solvency II, eine gegenüber Solvabilität I stärkere Risiko-Orientierung für die Bestimmung der erforderlichen Eigenmittel eines VU zur Stärkung der Sicherheit seiner Kunden zu erreichen, ist unstrittig positiv zu bewerten. Aber:

- Die Alternative „Expected Shortfall", wie sie in der Schweiz für den SST verwendet wird, ist bei einem Risikoniveau von 0,05% nicht praktikabel.
- Die schon von der IAA früher vorgeschlagene Alternative „Standardabweichungsprinzip" erfüllt bis auf die funktionale Monotonie alle Eigenschaften eines kohärenten Risikomaßes, hält aber nicht grundsätzlich ein gegebenes Sicherheitsniveau ein.

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

6. Literatur

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

6. Literatur

BENNEMAN, C. OEHLENBERG, L., STAHL, G. (Hrsg.) (2011): Handbuch Solvency II. Von der Standardformel zum Internen Modell, vom Goverance-System zu den MaRisk VA. Schäffer-Poeschel-Verlag, Stuttgart.

ALBRECHT,P., HUGGENBERGER, M. (2015): Finanzrisikomanagement. Methoden zur Messung, Analyse und Steuerung finanzieller Risiken. Schäffer-Poeschel-Verlag, Stuttgart.

DOFF, R. (2011): Risk Management for Insurers. Risk Control, Economic Capital and Solvency II. 2nd Ed., RISK Books, London.

DOFF, R. (ED.) (2014): The Solvency II Handbook. Practical Approaches to Implementation. RISK Books, London.

GESETZ ZUR MODERNISIERUNG DER FINANZAUFSICHT ÜBER VERSICHERUNGEN vom 1.4.2015, in: Bundesgesetzblatt Jahrgang 2015 Teil I Nr. 14, ausgegeben zu Bonn am 10. April 2015.

GRÜNDL, H., KRAFT, M. (HRSG.) (2015): Solvency II – Eine Einführung. Grundlagen der neuen Versicherungsaufsicht. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

MCNEIL, A.J., FREY, R., EMBRECHTS, P. (2005). Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques, Tools. Princeton Univ. Press, Princeton.

NELSEN, R. B. (2006). An Introduction to Copulas. 2nd ed., Springer, N.Y.

DIRECTIVE 2009/138/EC OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II). Official Journal of the European Union (2009), Vol. 52, L 335.

PFEIFER, D. (2013): Correlation, tail dependence and diversification. In: C. Becker, R. Fried, S. Kuhnt (Hrsg.): Robustness and Complex Data Structures. Festschrift in Honour of Ursula Gather, 301 - 314, Springer, Berlin.

RÜSCHENDORF, L. (2013): Mathematical Risk Analysis. Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios. Springer, Berlin.

Danke für die Aufmerksamkeit!